

1. Wykonaj działania na potęgach:

a) $(4x^{-1} + 3x)(4x - 3x^{-1})$,

b) $(108^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}})2^{\frac{1}{3}}$,

c) $\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}\right)^5$,

d) $\frac{3 \cdot 2^{2000} + 2^{2001}}{10^{1999}} \cdot 5^{2000}$,

e) $\frac{3^7 + 3^6}{3^6 + 3^5}$,

(R) f) $(\sqrt[3]{5} - 1)^3$,

(R) g) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$.

2. Przedstaw w postaci potęgi:

a) $\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x^5}(x\sqrt{x})^3$,

b) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$,

c) $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}$.

3. Sprawdź, czy ciąg:

a) $(\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2, \sqrt{5} - 2, \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)$ jest ciągiem arytmetycznym,

b) $(16, 2^{x-1}, 4^{x-3})$ jest ciągiem geometrycznym.

4. Do wykresu funkcji wykładniczej należy punkt $A = (-1, \frac{1}{3})$. Podaj wzór tej funkcji.

5. Naskicuj wykres funkcji:

a) $y = 4^{-x} - 4$,

b) $y = \frac{2^x}{2} - 3$,

c) $f(x) = 2^x - 1$ określonej w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$,

d) $f(x) = 2^{x-1}$ określonej w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

6. Wykonaj wykres funkcji $f(x) = 3 - (\frac{1}{3})^{x+1}$ i podaj miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.

7. Rozwiąż równanie:

a) $4^x = 8 \cdot 2^x$,

b) $(\frac{3}{4})^x = (\frac{4}{3})^{x-1}$,

c) $\frac{3^{x-3}}{27} = 9^{2x+2}$,

d) $0,4^x = 2,5^{x-6}$.

8. Rozwiąż nierówność:

a) $16^x - 4^x \leq 0$,

b) $25 \cdot (0,2)^{x^2} < 5^x$,

c) $0,3^x \geq 0,09$.

9. Określ dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{(\frac{1}{2})^x - 4} + \frac{1}{\sqrt{27-3^x}}$.

10. Oblicz:

a) $4^{\log_4 18}$, f) $\log_4 64$,

b) $3^{\log_3 7}$, g) $\log_{\frac{1}{2}} b = 5$,

c) $(\frac{1}{2})^{\log_2 11}$, h) $\log_{\sqrt{2}} b = -6$,

d) $\log 1$, i) $\log_{27} b = \frac{2}{3}$.

e) $\log_7 7$,

11. Oblicz:

a) $\log 125 + \log 4 - \log 5$,

b) $\log_3 36 - \log_3 2 + \log_3 \frac{1}{6}$,

c) $\log_{\frac{1}{2}} 0,6 - \log_{\frac{1}{2}} 0,15$,

d) $\log_7 19 - \log_7 \frac{19}{49}$.

12. Dany jest $\log x = \frac{1}{3}$. Oblicz:
- $\log x^6$,
 - $\log \frac{1}{x^3}$,
 - $\log \sqrt{x}$.
13. Dany jest $\log_3 x = -\frac{1}{4}$. Oblicz:
- $\log_3 9x^8$,
 - $\log_3 \frac{x^4}{81}$,
 - $\log_3 \sqrt[4]{3x^6}$.
14. Przedstaw podane wyrażenia w postaci jednego logarytmu:
- $2 \log_3 x + \log_3 y + 1$,
 - $\frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y - 2$.
15. Dana jest funkcja $f(x) = \log_2 x$. Oblicz $\frac{f(12)-2}{f(3)}$.
16. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek: $\log_4 c = \log_3 b = \log_2 a = 2$. Oblicz \sqrt{abc} .
17. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.
- Suma $\log_8 16 + 1$ jest równa:
 (A) 3 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\log_8 17$ (D) $\frac{7}{3}$.
 - Iloczyn $2 \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy:
 (A) -6 (B) -4 (C) -1 (D) 1.
 - Wyrażenie $\log_4(2x - 1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek:
 (A) $x \leq \frac{1}{2}$ (B) $x > \frac{1}{2}$ (C) $x \leq 0$ (D) $x > 0$.
 - Wartość wyrażenia $\frac{1}{2} \log_3 15 - \log_3 \sqrt{5}$ jest równa:
 (A) -1 (B) $\log_3 3\sqrt{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1.
 - Wyrażenie $\frac{\log_2 32}{\log_2 16}$ ma wartość równą:
 (A) $\log_2 16$ (B) $\log_2 2$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) 2.
18. (R) Sporządź wykres funkcji:
- $f(x) = -|x + 4|^{\frac{1}{2}} + 2$,
 - $f(x) = -(x + 3)^{-1} - 2$,
 - $f(x) = (x - 2)^3 - 4$.
19. (R) Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g opisane wzorami: $f(x) = 2^{x-1}$ i $g(x) = |2x + 1|$ oraz na podstawie ich wykresów odczytaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.
20. (R) Naskicuj wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności.
- $f(x) = |4 - 2^x|$,
 - $f(x) = 3^{|x|} - 3$,
 - $f(x) = |-2^{|x|-1} + 4|$. Wyznacz punkty wspólne wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
21. (R) Rozwiąż graficznie równanie:
- $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$,
 - $2|x| = 3^x - 1$.
22. (R) Naskicuj wykres funkcji $f(x) = 9 \cdot 3^{x-4} + 5$ i $g(x) = \left| \frac{x+2}{x-2} \right|$. Na podstawie tego rysunku określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.

23. (R) Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym; pierwsze z prędkością $v_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t-1} \left[\frac{cm}{s}\right]$, a drugie z prędkością $v_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-t} \left[\frac{cm}{s}\right]$, gdzie t oznacza czas liczony w sekundach od początku obserwacji tych ciał. Kiedy stosunek v_1 do v_2 jest mniejszy od $\frac{32}{243}$?

24. (R) Rozwiąż równanie:

a) $7^{x-2} \cdot 16^x = 2^{3x+2}$,

b) $3^{x+2} - 3^x = 72$,

c) $5^x + 5^{3-x} = 30$.

25. (R) Rozwiąż nierówność:

a) $6^x \leq 11^x$,

b) $2^{x+2} - 2^x < 48$,

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x-2} \geq 81^{1-x^2}$.

26. (R) Rozwiąż nierówność: $h(g(x)) \geq \frac{1}{16}$, jeżeli $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = x^2 - 5$.

27. (R) Oblicz

$$\log_3 \sqrt[4]{27} - \log_3 \left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} \right).$$

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

28. (R) Wiedząc, że $\log_c m = 2$, $\log_b m = 5$, $\log_a m = 10$. Oblicz $\log_{abc} m$. Zakoduj cyfry rozwinięcia dziesiętnego.

29. (R) Niech $m = \log_{21} 7$. Wykaż, że $\log_7 27 = \frac{3(1-m)}{m}$.

30. (R) Wykaż, że dla $a > 1$ i $x > 1$ zachodzi nierówność $\log_a x + \log_x a \geq \log 100$.

31. (R) Wykaż, że dla dowolnej liczby $a > 0$ zachodzi nierówność $\log^2(\pi a) + \log^2(\pi + a) \geq \frac{2}{\log_{\pi+a} 10} - \log_{\pi} \pi$.

32. (R) Wyznacz $\log_{16} 6$ jeżeli wiesz, że $\log_2 12 = a$.

33. (R) Oblicz:

a) $3^{\log_3 \sqrt[3]{27}}$,

b) $(\sqrt[3]{4})^{\log_4 \sqrt{32}}$,

c) $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$.

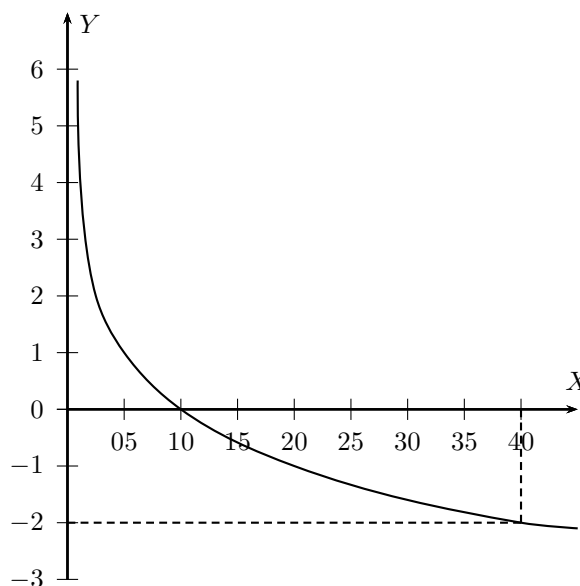
34. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz podaj jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \log_{0,1} |x - 7|$,

b) $f(x) = \log_2(x^2 - 3x)$.

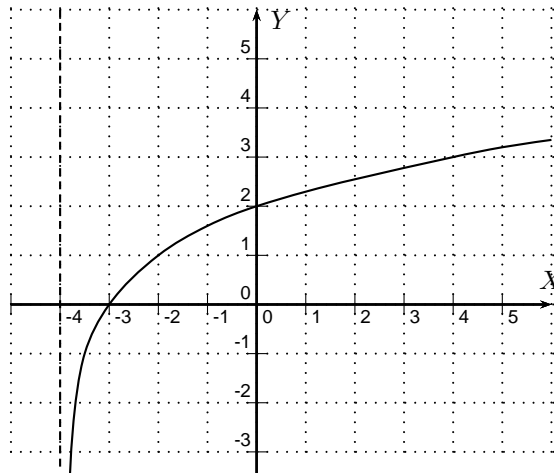
35. (R) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej f . Rozwiąż równanie

$$(f(x))^2 - 16 = 0.$$



36. (R) Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \log_2(-x^3 - 5x^2 - 3x + 9) - \log_2(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2})$.
37. (R) Dziedzina funkcji f opisanej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) - p$ jest przedział $(-3, \infty)$. Wiedząc, że do wykresu funkcji f należy punkt $A = (1, -4)$, oblicz wartość parametru p . Następnie:
- naskicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$,
 - wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru k , dla których równanie $g(x) = k$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

38. (R) Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.
- Podaj wartość p .
 - Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.
 - Podaj wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.



39. (R) Rozwiąż równanie $\log_5(\log_4(\log_2 x)) = 0$.
40. (R) Rozwiąż równanie $\log_{\frac{1}{4}} x \cdot \log_2 x = -\frac{1}{2}$.
41. (R) Rozwiąż równanie:
- $\log(x + 1, 5) = -\log x$,
 - $\log_2 x + 1 = 2 \log_x 2$,
 - $\log_x(3x + 4) = 2$,
 - $x^{1+\log_2 x} = 4$.
42. (R) Rozwiąż nierówność:
- $\log_3 |x + 3| < 0$,
 - $\log_2(\log_{\frac{1}{5}}(x - 1)) > 1$,
 - $\log^3 2x - \log^2 2x \geq 0$,
 - $\log_{0,5}(x + 4) - \log_{0,5}(3x - 1) \leq 0$,
 - $\log_x(x + 2) \leq 2$.
43. (R) Rozwiąż równanie: $1 + \log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \dots = 3$.
44. (RR) Dany jest ciąg (x_n) , o wyrazach dodatnich, w którym

$$\begin{cases} \log_2 x_1 = -2 \\ \log_2 x_n - \log_2 x_{n-1} = -2, \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{3}.$$

45. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Liczba $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$ jest:

- niewymierna,
- całkowita,
- kwadratem liczby naturalnej,
- większa od 7.

b) Niech $\log_6 2 = a$. Wynika stąd, że:

- $\log_3 2 = \frac{a}{1-a}$,
- $\log_2 3 = \frac{a}{1+a}$,
- $\log_6 3 = 1 - a$,
- $\log_3 6 = a - 1$.

c) Niech $a = \log_3 10$, $b = \log_5 10$, $c = \log_{15} 10$. Suma odwrotności liczb a , b i c jest liczbą:

- całkowitą,
- większą od 2,
- niemniejszą od 3,
- niewiększą od 3.