11. Ciągi

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

1. **a)** Podaj pięć wyrazów ciągu:

$$a_n = \sqrt{n^2+n}, \qquad b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 2, & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$$

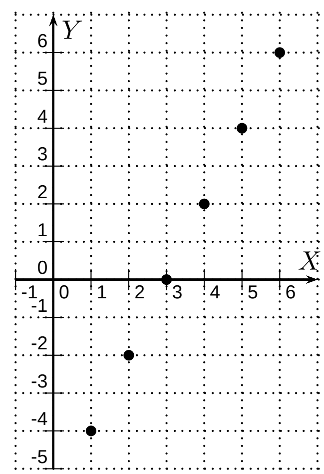
   b) Które z wyrazów ciągu $b_n = (n^2-1)(n^2-5n+6)$ są równe zero?
   c) Dany jest ciąg $a_n = n^2 - 6n$. Które wyrazy ciągu są mniejsze od 10?
   d) Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = 2n^2 - 3n + 1$.

2. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+2}{3n+1}$ dla $n = 1, 2, 3...$ Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu większe od $\frac{1}{2}$.

3. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n = 1, 2, 3...$. Oblicz a_2, a_4 i a_5.

4. Wykaż, że $n^2 + 2n^2 + 3n^2 + 4n^2 + ... + n^3 = \frac{n^3(n+1)}{2}$.

5. Sprawdź, czy dany ciąg jest:
   a) arytmetyczny: $a_n = \frac{n}{n+1}$,
   b) geometryczny, gdy $b_n = (a_n)^2$ i $a_n = 3 \cdot 2^n$ oraz czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.



6. Na rysunku przedstawiono część wykresu pewnego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).
   a) Na podstawie wykresu tego ciągu odczytaj jego pierwszy wyraz i różnicę.
   b) Podaj wzór na ogólny wyraz tego ciągu.
   c) Niech $b_n = -\frac{1}{2}n^2$ będzie wyrazem ogólnym ciągu (b_n).
   Dla jakich wartości n, $a_n = b_n$?

7. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4$, $a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $(0, 200)$.

8. Wyznacz liczbę składników w sumie $2 + 5 + 8 + 11 + ... + 449$ i oblicz tę sumę.

9. Liczby 2, $x-3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

10. Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

11. Darek odkładał ze stypendium pieniądze na wakacje. W pierwszym miesiącu odłożył 30 zł, a w każdym następnym o 5 złotych więcej niż w poprzednim. Przez ile miesięcy oszczędzał, jeżeli w sumie uzbierał 450 złotych?

12. Rozwiąż równanie $(2x+1) + (2x+4) + (2x+7) + ... + (2x+28) = 155$, jeśli wiadomo, że składniki po lewej stronie są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

13. Średni zarobek pięciu pracowników pewnej firmy wyniósł w maju 1560 złotych, a najwyższa pensja wyniosła 1800 złotych.
    a) Oblicz wysokości pensij tych pracowników w maju jeśli wiadomo, że tworzyły one ciąg arytmetyczny.
    b) W czerwcu nie pracował już pracownik, który w maju zarabiał najmniej i wtedy pensje pozostałych czterech wzrosły o jednakową kwotę. Ile zarabiał każdy z pozostałych pracowników w czerwcu, jeśli wiadomo, że kwota przeznaczona na wypłatę pensji była w czerwcu taka sama jak w maju?

14. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $n \geqslant 1$. Wiadomo, że dla każdego $n \geqslant 1$ suma n początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ wyraża się wzorem: $S_n = -n^2 + 13n$.
    a) Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciagu (a_n).
    b) Oblicz a_{2007}.
    c) Wyznacz liczbę n, dla której $a_n = 0$.

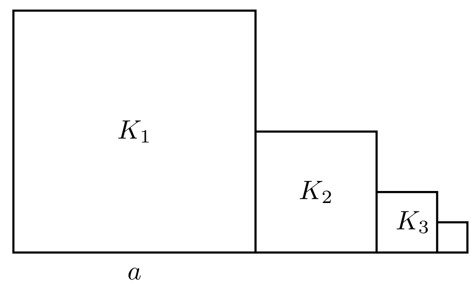
15. Suma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$ dla $n \geqslant 1$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

16. Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

17. Dany jest rosnący ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 12$, $a_3 = 27$.
a) Wyznacz iloraz tego ciągu.
b) Zapisz wzór, na podstawie którego można obliczyć wyraz a_n, dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.
c) Oblicz wyraz a_6.

18. Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na półce górnej, a ile płyt stoi na półce dolnej.

19. Kwadrat K_1 ma bok długości a. Obok niego rysujemy kolejno kwadraty K_2, K_3, K_4, ... takie, że kolejny kwadrat ma bok o połowę mniejszy od boku poprzedniego kwadratu, jak na rysunku. Wyznacz pole kwadratu K_{12}.



20. Wiedząc, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciagu geometrycznego, oblicz $1 + 3 + 9 + ... + 243$.

21. Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$, natomiast ciąg $(a - 1, b + 5, c + 19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

22. Pan X umówił się z panem Y, że będzie mu wypłacał codziennie przez trzy tygodnie pieniądze, przy czym pierwszego dnia 10 zł, drugiego 20 zł, trzeciego 30 zł, czwartego 40 zł itd. W zamian pan Y wypłaci mu pierwszego dnia 1 grosz, drugiego 2 grosze, trzeciego 4 grosze, czwartego 8 groszy itd. Który z tych panów zyska na umowie i ile?

23. Pan Kowalski planując wyjazd na wakacje letnie w następnym roku postanowił założyć lokatę, wpłacając do banku 2000 zł na okres jednego roku. Ma do wyboru trzy rodzaje lokat:
lokata A - oprocentowanie w stosunku rocznym 5%, kapitalizacja odsetek po roku,
lokata B - oprocentowanie w stosunku rocznym 4,8%, kapitalizacja odsetek co pół roku,
lokata C - oprocentowanie w stosunku rocznym 4,6%, kapitalizacja odsetek co kwartał.
Oceń, wykonując odpowiednie obliczenia, która lokata jest najkorzystniejsza dla Pana Kowalskiego.

24. **a)** Cena płaszcza była 4 razy podwyższana o 5%. Jaka jest obecna cena płaszcza, jeżeli przed pierwszą podwyżką kosztował on 400 zł?
b) Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po 6 latach przy oprocentowaniu rocznym wynoszącym 5%.
c) Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony na 5 lat, jeżeli roczna stopa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane co pół roku.
d) Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi 4,5% w skali roku, wpłacono 5000 zł. Oblicz stan tej lokaty po dwóch latach oszczędzania, jeżeli od nalicznych odsetek będzie pobierany co roku podatek w wysokości 20%.

25. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$ dla $n \geqslant 1$. Wynika stąd, że
(A) $a_3 = -81$, **(B)** $a_3 = -27$, **(C)** $a_3 = 0$, **(D)** $a_3 > 0$.

b) Liczby $x - 1$, 4 i 8 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wówczas liczba x jest równa
(A) 3, **(B)** 1, **(C)** -1, **(D)** -7.

c) Liczby -8, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba x jest równa
(A) -3, **(B)** $-1,5$, **(C)** 1, **(D)** 15.

d) Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które są podzielne przez 6 lub przez 10, jest
(A) 25, **(B)** 24, **(C)** 21, **(D)** 20.

26. (R) **a)** Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} \end{cases}$, dla $n \geqslant 1$.

    Wyznacz wzór ogólny ciagu.

    b) Określ wzór rekurencyjny ciągu na dwa sposoby korzystając z różnicy $a_{n+1} - a_n$ oraz ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ gdy $a_n = 2 \cdot 3^n$.

27. (R) Ciag liczbowy (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wzorem: $a_n = (n-3)(2-p^2)$, gdzie $p \in \mathbb{R}$.
    a) Wykaż, że dla każdej wartości p ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
    b) Dla $p = 2$ oblicz sumę $a_{20} + a_{21} + a_{22} + ... + a_{40}$.
    c) Wyznacz wszystkie wartości p, dla których ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n - pn$ jest stały.

28. (R) Dany jest ciąg (a_n) majacy tę własność, że dla każdej liczby naturalnej n suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{2}(7n^2 - n)$. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu. Wykaż, że (a_n) jest ciagiem arytmetycznym.

29. (R) Z ciągu liczb naturalnych $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$ wybrano 100 kolejnych takich liczb, z których każda ma tę samą własność, że jeżeli podzielimy ja przez 3, to otrzymamy resztę jeden. Wyznacz najmniejszą z nich, wiedząc, że suma wszystkich tych liczb jest równa 17950.

30. (R) Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4n - 31$, $n = 1, 2, 3, ...$. Wyrazy a_k, a_{k+1}, a_{k+2} danego ciągu (a_n), wzięte w takim porządku, powiększono: wyraz a_k o 1, wyraz a_{k+1} o 3 oraz wyraz a_{k+2} o 23. W ten sposób otrzymano trzy pierwsze wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz k oraz czwarty wyraz tego ciagu geometrycznego.

31. (R) Różnica między drugim a pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego wynosi 5, zaś różnica między czwartym, a pierwszym wyrazem tego ciągu wynosi 35. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciagu i jego iloraz.

32. (R) Wyznacz pierwsze trzy wyrazy ciągu geometrycznego wiedząc, że są one dodatnie, ich suma jest równa 21 oraz suma ich odwrotności jest równa $\frac{7}{12}$.

33. (R) Wykaż, że jeżeli liczby $b, c, 2b - a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to liczby ab, b^2, c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

34. (R) O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, zaś ciąg $(a+1, b+4, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

35. (R) O ciągu (x_n) dla $n \geqslant 1$ wiadomo, że:

    a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \geqslant 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$.

    b) $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 145$.

    Oblicz x_1.

36. (R) Oblicz granicę ciągu:

    a) $a_n = \frac{-4n^2+3n+1}{2+n+2n^2}$

    b) $b_n = \frac{10n^2-2}{2-n+n^3}$,

    c) $c_n = \frac{6n^4+n^2-5}{2-n^3}$,

    d) $d_n = 8 + 2n^3 - 4n^5$,

    e) $e_n = 3 \cdot 4^n - 5^{n+1}$,

f) $f_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n-4}$,

g) $g_n = \sqrt[3]{\frac{n^3+2}{8n^3+n}}$,

h) $h_n = \frac{3(n+2)!-n!}{(n+2)!+n!}$.

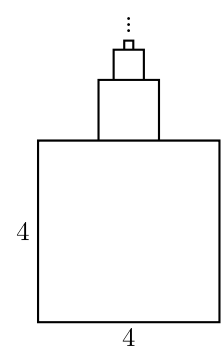
37. (R) **a)** Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}.$$
Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.
b) Oblicz granicę ciągu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n+2}{(8n+7)(n+4)}.$$
Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonej granicy.

38. (R) Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.
a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).
b) Oblicz
$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

39. (R) Wyznacz wartość parametru b, dla której
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^2 n}{(b+4)n+b} = 2.$$

40. (R) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich taki, ż e $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

41. (R) Górną podstawę kwadratu o boku długości 4 podzielono na trzy równe części i skonstruowano kwadrat, następnie górną podstawę kwadratu górnego podzielono na trzy równe części i znów skonstruowano kolejny kwadrat, itd.
a) Oblicz sumę obwodów wszystkich kwadratów.
b) Oblicz sumę pól wszystkich kwadratów.



42. (R) Liczby $0,(1)$ i $0,0(5)$ są pierwszym i drugim wyrazem nieskończonego ciągu geometrycznego. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu i zapisz go w postaci ułamka okresowego. Zakoduj cztery pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

43. (R) Dla jakich wartości x szereg geometryczny $1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{27x^3} + ...$ jest zbieżny? Oblicz sumę.

44. (R) Rozwiąż równanie $x^2 + x^3 + x^4 + ... = 1\frac{1}{3}$, którego lewa strona jest sumą nieskończoneho ciagu geometrycznego.

45. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{3}{(\sqrt{2})^n}$ dla $n = 1, 2, 3, ...$
Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa
(A) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, **(C)** $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$, **(D)** $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$.

b) Niech ciąg (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym. Zatem ciągiem arytmetycznym jest ciąg określony wzorem:
(A) $b_n = a_n + a_{n+1}$, **(B)** $b_n = a_{2n}$, **(C)** $b_n = 3 - 2a_n$, **(D)** $b_n = |a_n|$.

c) Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n \end{cases}$. Zatem:
(A) $a_4 = 16$, **(B)** $a_4 = 19$, **(C)** $a_3 = 7$, **(D)** $a_3 = 8$.

d) Liczba 3 jest granicą ciągu:
(A) $a_n = \frac{3-n}{2n}$, **(B)** $b_n = \frac{\sqrt{3n}+2}{\sqrt{n}}$, **(C)** $c_n = \frac{n^2-9}{n^2+3n}$, **(D)** $d_n = \frac{2+3^{n+1}}{3^n}$.