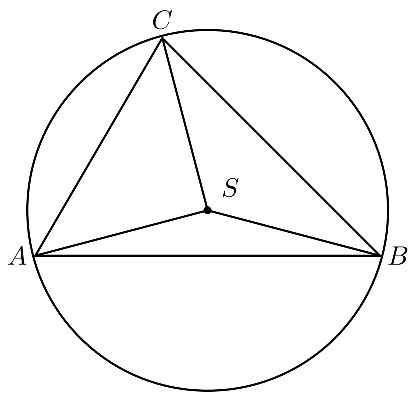
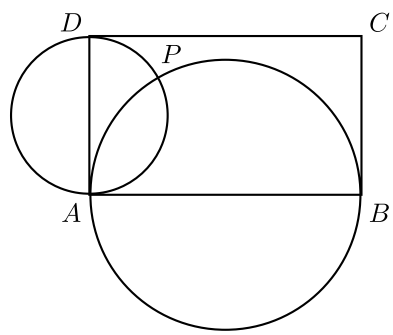
12. Planimetria **mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska**

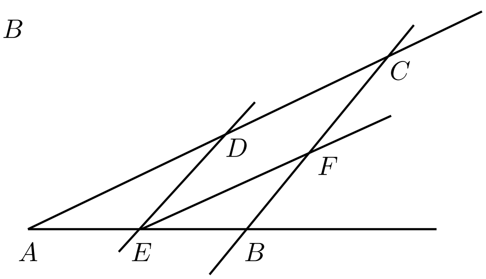
1. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. $\measuredangle ACS$ jest trzy razy większy od $\measuredangle BAS$, a $\measuredangle CBS$ jest dwa razy większy od $\measuredangle BAS$. Oblicz kąty trójkąta ABC.



2. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (rys.). Wykaż, że punkty B, P, D leżą na jednej prostej.

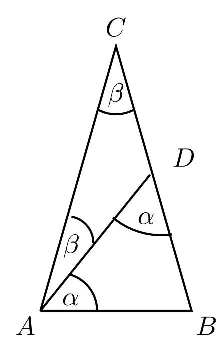


3. Proste DE i CB oraz EF i AC są równoległe. Oblicz długość odcinka EB, jeżeli $|AE| = 2\frac{1}{2}$, $|DE| = 3$ oraz $|FB| = 4$.



4. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że $\measuredangle APB$ jest rozwarty.

5. Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\measuredangle ADC| = 5|\measuredangle ACD|$.



6. Wykaż, że wysokość CD trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka C kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki AD i DB, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio AC i BC tego trójkąta.

7. Na trójkącie o bokach długości $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ opisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

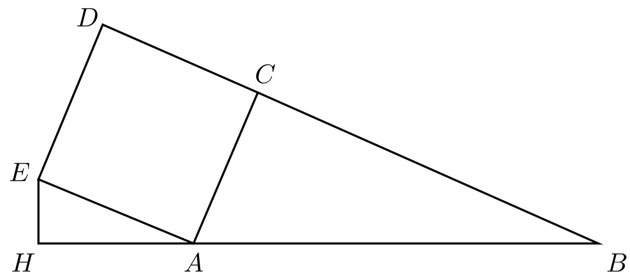
8. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB, taki że $\sin|\sphericalangle BAC| = 0,3$ i $|AC| = 7$. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

9. Ostrokątny trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB jest wpisany w okrąg o środku S, przy czym $\measuredangle SAB$ ma miarę $40°$. Oblicz miarę $\measuredangle CAB$.

10. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości $5, 5$ i 8.

11. Udowodnij, że promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokatnych a, b i przeciwprostokątnej c jest równy $\frac{a+b-c}{2}$.

12. Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC, w którym $|\measuredangle ACB| = 90°$ oraz $|AC| = 5$, $|BC| = 12$ zbudowano kwadrat $ACDE$ (zobacz rysunek). Punkt H leży na prostej AB i $|\measuredangle EHA| = 90°$. Oblicz pole trójkąta HAE.



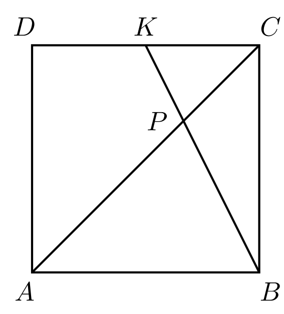
13. Oblicz pole i obwód czworokąta wypukłego $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary: $|\measuredangle A| = 90°$, $|\measuredangle B| = 75°$, $|\measuredangle C| = 60°$, $|\measuredangle D| = 135°$, a boki AB i AD mają długość 3 cm. Sporządź rysunek pomocniczy.

14. Dany jest kwadrat o boku długości a. W prostokącie $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy niż bok kwadratu, a bok AD jest o 2 cm krótszy od boku kwadratu. Pole tego prostokąta jest o 12 cm^2 większe od pola kwadratu. Oblicz długość boku kwadratu.

15. Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długośc boku b o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy.

16. Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%.
a) O ile procent zwiększy się pole tego prostokąta?
b) Wyznacz długość boku b, dla której nowy prostokąt będzie miał taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy, jeśli wiadomo, że bok a ma długość 30 cm.

17. Na bok DC kwadratu $ABCD$ obrano punkt K taki, że $|DK| = |KC|$ (rys.). Przekątna AC kwadratu przecina odcinek BK w punkcie P. Udowodnij, że pole trójkąta ABP jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta KCP.

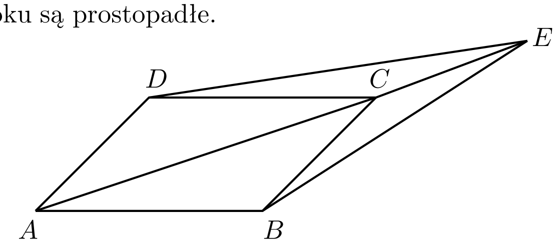


18. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę $45°$, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

19. Oblicz obwód rombu, którego pole jest równe 384, a stosunek długości przekątnych wynosi 3 : 4.

20. Wykaż, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.

21. Dany jest równoległóbok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E taki, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$ (zobacz rys.). Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe niż pole trójkąta DCE.

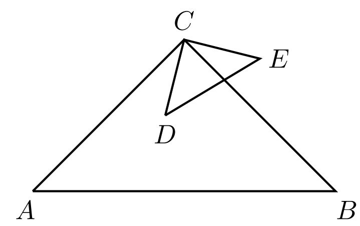


22. Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Wykaż, że pola trójkątów ABC i ABD są równe.

23. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S. Wykaż, że $|SA| \cdot |SD| = |SB| \cdot |SC|$.

24. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że $\measuredangle AED$ jest prosty.

25. Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na rysunku obok (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.

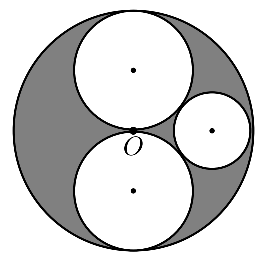


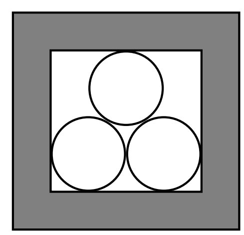
26. Podstawy trapezu prostokątnego maja długość 6 i 10 oraz tangens jego kąta ostrego jest równy 3. Oblicz pole tego trapezu.

27. W trapezie prostokatnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

28. Dany jest trapez równoramienny, którego ramię ma długość 6 i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem $60°$. Podstawa ta ma długość 10.
a) Oblicz obwód i pole trapezu.
b) Oblicz długość przekątnej trapezu.
c) Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych od dłuższej podstawy.

29. Dane są cztery okręgi parami styczne. Promień największego okręgu o środku O jest równy 2.
a) Oblicz długość promienia najmniejszego okręgu.
b) Oblicz pole zacieniowanego obszaru.





30. Szkic przedstawia kanał ciepłowniczy, którego przekrój poprzeczny jest prostokątem. Wewnątrz kanału znajduje się rurociąg składający się z trzech rur, każda o średnicy zewnętrznej 1 m. Oblicz wysokość i szerokość kanału ciepłowniczego. Wysokość zaokrąglij do $0,01$ m.

31. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Kąt środkowy i wpisany w okrąg są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa $180°$. Jaka jest miara kąta środkowego?
(A) $60°$ **(B)** $90°$ **(C)** $120°$ **(D)** $135°$

b) Jeżeli trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, a ich pola są, odpowiednio, równe 25 cm^2 i 50 cm^2, to skala podobieństwa $\frac{A'B'}{AB}$ jest równa
(A) 2 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Wysokość trapezu równoramiennego o kącie ostrym $60°$ i ramieniu długości $2\sqrt{3}$ jest równa
(A) $\sqrt{3}$ **(B)** 3 **(C)** $2\sqrt{3}$ **(D)** 2

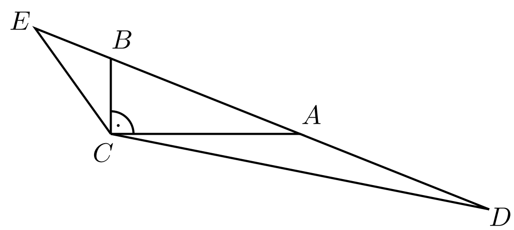
d) Wielokąt o polu 180 cm^2 przekształcono przez podobieństwo o skali k tak, że jego pole zmniejszyło się o 100 cm^2. Skala k podobieństwa jest równa:
(A) $k = \frac{4}{9}$ **(B)** $k = \frac{2}{3}$ **(C)** $k = \frac{10}{18}$ **(D)** $k = \frac{16}{81}$

e) Przekątna AC prostokąta $ABCD$ ma długość 14. Bok AB tego prostokąta ma długość 6. Długość boku BC jest równa
(A) 8 **(B)** $4\sqrt{10}$ **(C)** $2\sqrt{58}$ **(D)** 10

f) Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy
(A) 36 **(B)** 18 **(C)** 12 **(D)** 6

32. (R) Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 200. Tanges jednego z jego kątów ostrych wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz odległość między wierzchołkiem kąta prostego a punktem styczności okręgu z przeciwprostokątną. Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

33. (R) Dany jest trójkąt prostokatny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie równym $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek).

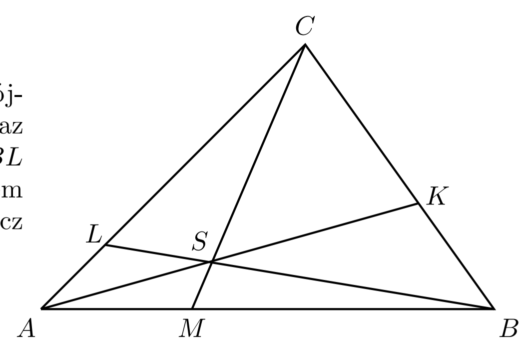


Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.

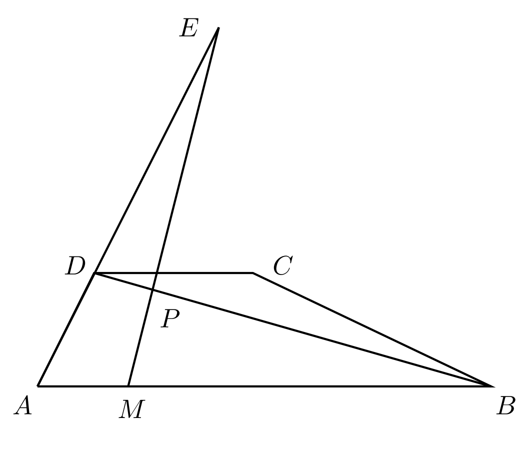
34. (R) Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC.

35. (R) Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\angle BAC| = 30°$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

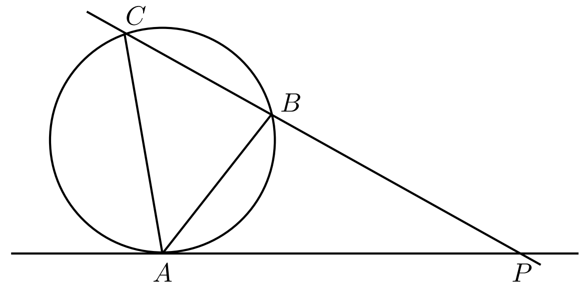
36. (R) Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym zachodzą równości $|MB| = 2|AM|$ oraz $|LC| = 3|AL|$. Punkt S jest punktem przcięcia odcinków BL i CM. Punkt K jest punktem przecięcia prostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS.



37. (R) Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB||CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $|AE| = 3|AD|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $|MB| = 4|AM|$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|BP| = 6|PD|$.



38. (R) Dany jest trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P. Długości odcinków są odpowiednio równe: $|AC| = 12$, $|CB| = 9$, $|BP| = 17$.



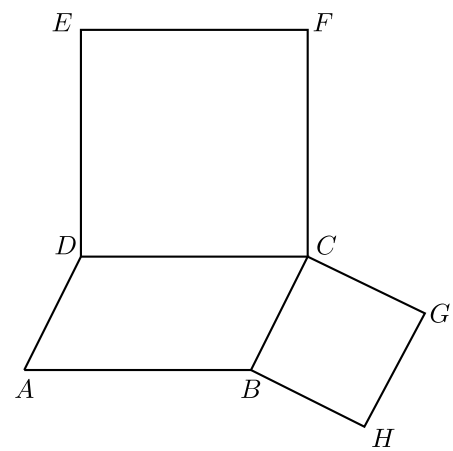
Oblicz długość odcinka AB. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

39. (R) Dane są długości dwóch boków trójkąta $a = 3$, $b = 5$ oraz pole $P = 6$. Oblicz długość trzeciego boku.

40. (R) Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 1. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F umieszczone tak, by $|CE| = 2|DF|$. Oblicz wartość $x = |DF|$, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

41. (R) W trójkącie ABC, o kącie rozwartym przy wierzchołku C dane są długośći boków $|AC| = 5$ i $|BC| = 12$. Oblicz długość boku AB wiedząc, że pole trójkąta jest równe 24. Podaj trzy cyfry rozwinięcia dziesiętnego (uwzględniając część całkowitą) otrzymanego wyniku.

42. (R) Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.



43. (R) Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek AE jest wysokością trójkąta DAB opuszczoną na jego bok BD. Wyraź pole trójkąta AED za pomocą a ib.

44. (R) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.

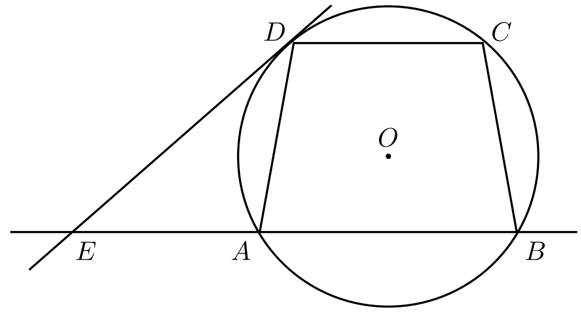
45. (R) W pewnym trapezie kąty przy dwóch przeciwległych wierzchołkach mają miary α oraz $90^\circ + \alpha$. Jedno z ramion tego trapezu ma długość l. Wyznacz różnicę długości podstaw tego trapezu.

46. (R) W trapezie opisanym na okręgu boki nierównoleołe mają długości 3 i 5, zaś odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na dwie części, których pola są w stosunku 5 : 11. Oblicz długości podstaw trapezu.

47. (R) Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r. Wykaż, że $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$.

48. (R) Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$, wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokata ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się $\frac{3}{8}$.

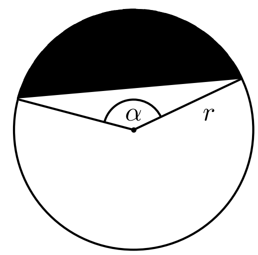
49. (R) W okrąg wpisano trapez równoramienny, którego podstawy mają długość $|AB| = 8$ cm, $|DC| = 4$ cm. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5}$ cm oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.



50. (R) Pole wycinka koła o promieniu 3 jest równe 2. Oblicz miarę łukową kąta środkowego tego wycinka.

51. (R) Uzasadnij, że pole odcinka koła przedstawionego na rysunku można obliczyć według wzoru:

$$S = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha - sin\alpha\right).$$



52. (R) Na bokach prostokąta o stałym obwodzie $4p$ opisano jako na średnicach półokręgi leżące na zewnątrz prostokąta. Zbadaj, dla jakich długości boków prostokąta pole figury ogrniczonej tymi półokręgami i bokami prostokąta jest najmniejsze.

53. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Na trapezie o dłuższej podstawie równej 8 cm i wysokości $\sqrt{3}$ cm opisano okrąg. Jeden z kątów tego trapezu jest jedenaście razy mniejszy od sumy miar pozostałych kątów. Wskaż pole trapezu.
(A) $4\sqrt{3}$ cm^2 **(B)** $5\sqrt{3}$ cm^2 **(C)** $6\sqrt{3}$ cm^2 **(D)** $8\sqrt{3}$ cm^2

b) Stosunek pola rombu do pola koła wpisanego w ten romb wynosi $\frac{8}{\pi}$. Wskaż miarę kąta ostrego tego rombu.
(A) 15° **(B)** 30° **(C)** 45° **(D)** 60°

c) Trapez równoramienny o podstawach długości 4 cm i 16 cm jest opisany ma okręgu. Jaką długość ma przekątna tego trapezu?
(A) 12 **(B)** $2\sqrt{41}$ **(C)** $4\sqrt{17}$ **(D)** $3\sqrt{34}$

d) W trójkącie ABC dane są: $|\measuredangle ABC| = 75^\circ$ i $|\measuredangle BCA| = 45^\circ$. Jeśli bok AB ma długość 2 cm, to bok AC ma długość:
(A) $(\sqrt{3}+3)$ cm, **(B)** $(\sqrt{3}+2)$ cm, **(C)** $(\sqrt{3}+1)$ cm, **(D)** $2\sqrt{3}$ cm.

e) Boki równoległoboku mają długości 4 i $2+2\sqrt{3}$, a miara jego kąta rozwartego jest równa 150°. Jedna z przekątnych tego równoległoboku ma długość:
(A) $2+\sqrt{2}$, **(B)** $2+\sqrt{3}$, **(C)** $2\sqrt{2}$, **(D)** $2\sqrt{3}$.