9. Funkcje trygonometryczne **mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska**

1. Wyznacz długości boków trójkąta prostokatnego ABC oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\measuredangle CAB$ mając dane $\sin|\measuredangle(CAB)| = \frac{4}{5}$ i $|BC| = 2$.

2. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym dana przyprostokątna jest dwa razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

3. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy 1 dm, 2 dm i wysokości 30 cm. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.

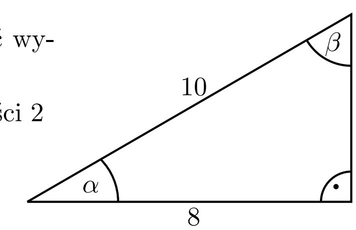
4. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeżli α jest jednym z dwóch kątów ostrych trójkąta oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ i długość przeciwprostokątnej równa jest 15 cm.

5. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:
   a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$,
   b) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$,
   c) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$,
   d) $\operatorname{ctg}\alpha = -2,4 \wedge \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$.

6. Czy istnieje kąt α, dla którego
   a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge\ \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$,
   b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \ \wedge\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
   c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5} - 2 \ \wedge\ \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5} + 2$,
   d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \ \wedge\ \sin\alpha = \frac{3}{5}$,
   e) $3\cos\alpha - 2 = 6$,
   f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ \wedge\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

7. Wyznacz kąty trójkąta prostokątnego wiedząc, że:
   a) iloczyn sinusa jednego kąta ostrego i cosinusa drugiego kąta ostrego wynosi $\frac{1}{4}$.
   b) kwadrat odwrotności tangensa kąta ostrego wynosi 3.

8. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz wartość wyrażenia: $\operatorname{tg}^2\beta - 5\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.



9. W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokatne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

10. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

11. Korzystając z tożsamości $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}$.

12. Wiedząc, że α jest katem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{4\cos\alpha - \sin\alpha}{3\cos\alpha + 5\sin\alpha}$.

13. Oblicz $a - b$, gdy $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, $b = 1 - 4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$.

14. Kąt $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

15. Uzasadnij, że jeśli $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ to $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^4\alpha$.

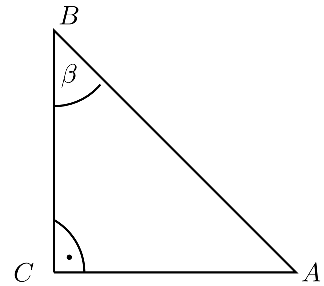
16. W trójkącie prostokatnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

17. Wykaż, że gdy α i β są kątami ostrymi trójkąta prostokątnego, to
$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = 1.$$

18. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas
(A) $\cos\alpha < \frac{3}{4}$ **(B)** $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ **(C)** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$ **(D)** $\cos\alpha > \frac{\sqrt{13}}{4}$.

b) Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Jaki warunek spełnia kąt α?
(A) $\alpha < 30°$ **(B)** $\alpha = 30°$ **(C)** $\alpha = 60°$ **(D)** $\alpha > 60°$.



c) Dane są długości boków $|BC| = 5$, $|AC| = 3$ trójkąta prostokątnego ABC o kącie ostrym β (zobacz rysunek). Wtedy:

(A) $\sin\beta = \frac{3}{5}$ **(B)** $\sin\beta = \frac{4}{5}$
(C) $\sin\beta = \frac{3\sqrt{34}}{34}$ **(D)** $\sin\beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}$.

d) Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartość wyrażenia $\cos^2 -2$ jest równa:
(A) $-\frac{7}{4}$ **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. (R) Naszkicuj w układzie współrzędnych kąt α taki, że
a) $\sin\alpha = -\frac{1}{3} \;\wedge\; \alpha \in \langle 270°, 360° \rangle$,
b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$,
c) $\operatorname{tg}\alpha = 2 \;\wedge\; \alpha \in \langle 180°, 270° \rangle$,
d) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{3}$.

20. (R) Wiedząc, że $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, $\sin\alpha < 0$ oraz $4\operatorname{tg}\alpha = 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$
a) oblicz $\operatorname{tg}\alpha$,
b) zaznacz w układzie współrzędnych kąt α i podaj współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

21. (R) Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta:
a) $\beta = 120°$,
b) $\beta = 210°$,
c) $\beta = 315°$.

22. (R) Oblicz:
a) $\sin 765°$,
b) $\cos 1200°$,
c) $\sin(-1710°)$,
d) $\operatorname{tg}(-750°)$,
e) $\cos(-450°)$,
f) $\operatorname{ctg}(-1395°)$,
g) $\sin(-7\pi)$,
h) $\cos\frac{15}{2}\pi$,
i) $\operatorname{ctg}(-\frac{23}{4}\pi)$,
j) $\operatorname{tg}\frac{13}{3}\pi$,
k) $2\sin 150° - 3\cos 120° + \operatorname{tg} 135°$.

23. (R) Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta x, gdy:
a) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \;\wedge\; x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$,
b) $\operatorname{tg} x = -3 \;\wedge\; x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,
c) $\cos x = \frac{2}{3}$.

24. (R) Miary pięciu kątów tworzą ciąg arytmetyczny. Drugim wyrazem tego ciągu jest 150° a czwartym 270°. Oblicz sumę sinusów tych pięciu kątów.

25. (R) Wykaż, że $\frac{-\cos 2x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ nie jest tożsamością.

26. (R) Sprawdź czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną:
a) $1-(\cos x-\sin x)^2=2\sin x\cos x$,
b) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\left(\frac{sin^2x}{1-cos^2x}\right)^{-1}$,
c) $\cos x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=-1$ dla $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$,
d) $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$ dla $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\wedge k\in\mathbb{C}$.

27. (R) Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość: $4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1+3\cos^2 2\alpha$.

28. (R) **a)** Oblicz wartość wyrażenia $\sin 2x$, jeśli $\operatorname{ctg} x=5\ \wedge\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
b) Sprawdź, czy $\operatorname{ctg}10^\circ-\operatorname{ctg}20^\circ=\frac{1}{\sin 20^\circ}$.
c) Na podstawie wzoru: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$, oblicz: $\sin 75^\circ$.
d) Oblicz $\sin\alpha+\cos\alpha$, gdy $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0,5$.

29. (R) Rozwiąż równanie:
a) $\cos 3x=\sin\frac{5}{6}\pi$,
b) $\operatorname{tg} x=\sin x$, gdy $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,
c) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)=1$,
d) $\operatorname{ctg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $x\in(-\pi,0)$,
e) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

30. (R) Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x-5\sin x-4=0$ należące do przedziału $<0,2\pi>$.

31. (R) Rozwiąż równanie $2\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x=1-\cos x$ w przedziale $<0,2\pi>$.

32. (R) Rozwiąż równanie $\cos 2x+\cos x+1=0$ dla $x\in<0,2\pi>$.

33. (R) Rozwiąż rówanie $\cos 2(x+\frac{\pi}{3})+4\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{5}{2}$.

34. (R) Rozwiąż rówanie $\cos 2x+2=3\cos x$.

35. (R) Rozwiąż równanie $\sin 5x-\cos 2x+\sin x=0$.

36. (R) Udowodnij, że równość $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ jest tożsamością.

37. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{2\cos x}(9-x^2)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

38. (R) **a)** Wyznacz wszystkie liczby z przedziału $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, które spełniają nierówność $\operatorname{tg} x>-1$.
b) Rozwiąż nierówność $\cos x\leqslant 0,5$ w przedziale $<0,2\pi>$.
c) Odczytaj z wykesu funkcji, dla jakich wartości argumentu $x\in<0,2\pi>$ spełniona jest nierówność $\sin x>-\frac{1}{2}$.
d) Rozwiąż nierówność $\operatorname{ctg} x\geqslant 1$.
e) Rozwiąż nierówność $\cos 5x>\frac{1}{2}$ dla $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

39. (R) Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego jego miejsca zerowe i zbiór wartości:
a) $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$,
b) $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$,
c) $f(x)=\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{6})$,
d) $y=|\cos x|$,
e) $f(x)=-2\sin x\cos x$,
f) Wyznacz okres zasadniczy funkcji i sporządź jej wykres $g(x)=\sin x+\cos x$.

40. (R) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{sin^2x-|\sin x|}{\sin x}$ dla $x\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$.
a) Naszkicuj wykres funkcji f.
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

41. (R) **a)** Naszkicuj wykres funkcji $y=\sin 2x$ w przedziale $<-2\pi,2\pi>$.
b) Naszkicuj wykres funkcji $y=\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $<-2\pi,2\pi>$ i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}<0$.

42. (R) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin 2x|\operatorname{tg} x|$. Z wykresu odczytaj i zapisz rozwiązanie równania $f(x) = 1$.

43. (R) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos x + |\sin x|}{\cos x}$ dla $x \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $0 \leqslant f(x) < 2$.

44. (R) **a)** Dla jakich wartości parametru m równanie $3\cos x - 2 = m$ ma rozwiązanie.

    b) Dane jest równanie $\sin x = a^2 + 1$, z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których dane równanie nie ma rozwiązań.

45. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

    a) Równanie $\sin^2 x = \sin x$ w przedziale $< 0, \pi >$:
    (A) ma dokładnie 1 rozwiązanie **(B)** ma dokładnie 2 rozwiązania
    (C) ma dokładnie 3 rozwiązania **(D)** nie ma rozwiązań.

    b) Suma $\sin\alpha + \sin 3\alpha$ jest dla każdego α równa:
    (A) $\sin 4\alpha$ **(B)** $2\sin 4\alpha$ **(C)** $2\sin 2\alpha\cos\alpha$ **(D)** $2\sin\alpha\cos 2\alpha$.

    c) Która z funkcji jest w przedziale $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ jest rosnąca?
    (A) $y = \sin x$ **(B)** $y = \cos x$ **(C)** $y = \frac{1}{\sin x}$ **(D)** $y = \frac{1}{\cos x}$.

    d) Zbiór $\{x : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{C}\}$ jest zbiorem rozwiązań równania:
    (A) $\sin x = \cos x$ **(B)** $tgx = 1$ **(C)** $\cos 2x = 0$ **(D)** $\sin 2x = 0$.