1. Liczby rzeczywiste

mgr Magdalena Kucharska, mgr Anna Piłat

1. **Przedstaw** liczbę 0 w postaci:

   a) ilorazu dwóch liczb wymiernych,

   b) różnicy dwóch pierwiastków różnych stopni,

   c) iloczynu dwóch potęg o różnych podstawach.

2. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

   Wartość wyrażenia $2021 : \left(1 - \frac{1}{2022}\right) - \left(1 - \frac{2022}{2021}\right) : \frac{1}{2021}$ jest równa

   A. 0 **B.** 1 **C.** 2021 **D.** 2023

2. A) **Podaj** przykłady trzech liczb wymiernych m, k, l spełniających warunek $\frac{1}{4} < m < k < l < \frac{8}{25}$,

   B) **Wyznacz** ułamek o mianowniku 250, który jest większy od 0,(8) i jednocześnie mniejszy od $\frac{23}{25}$.

3. **Oblicz**:

   a) 3 + 2,(9),

   b) 2 + 3,(4),

   c) 6 – 2,(7),

   d) 2 · 0,(1) + 0,(7),

   e) 1,(09) + 0,(90),

   f) Zamień liczbę 1, 24(36) na ułamek zwykły.

4. Niech $a = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11^5$ i $b = 4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^4$.

   a) **Wyznacz** $NWW(a, b)$ i $NWD(a, b)$.

   b) **Oblicz** $\frac{NWW(a,b)}{NWD(a,b)}$.

4. A) **Wykaż**, że $NWW(a, b) \cdot NWD(a, b) = a \cdot b$.

5. O liczbie x wiadomo, że $NWD(6, x) = 3$ oraz $NWW(6, x) = 90$. **Oblicz** x.

6. **Oceń** prawdziwość poniższych zdań. **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Liczba $3^{33} + 3^{33} + 3^{33}$ jest równa 9^{17}.	**P**	**F**
2.	Odwrotnością liczby $2 + \sqrt{5}$ jest liczba $2 - \sqrt{5}$.	**P**	**F**

7. **Przedstaw** liczbę $\frac{27^{665} \cdot \sqrt[3]{3^{-92}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{152}{3}}}$ w postaci potęgi liczby 3.

7. A) **Przedstaw** liczbę $\frac{4^{-1} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$ w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

8. **Oblicz**:

   a) $\sqrt{-2\sqrt[3]{-8}}$,

   b) $\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}\right)^3\right)^5$,

   c) $\frac{\sqrt[3]{-60}\cdot\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}}$,

   d) $\sqrt{x}-\sqrt{8}=\sqrt{32}$,

   e) $\frac{1}{x}=\sqrt[3]{0{,}064}$.

9. Która z podanych równości (**A–D**) jest prawdziwa? **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

   A. $\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^3=\sqrt{7^3}+\sqrt{5^3}$ **B.** $\sqrt{\sqrt{144}+\sqrt{16}}=2^{\frac{4}{2}}$

   C. $\left(\sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^3=2^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **D.** $\left(\sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{8}}=8^3$

9. A) Dane są liczby $a=\sqrt{5}-2$ oraz $b=\sqrt{5}+2$. **Oblicz** wartość wyrażenia $\frac{a\cdot b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ dla podanych a i b.

9. B) Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b, które spełniają warunki: $a\neq 0$ oraz $b\neq 0$ oraz $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=0$. **Oblicz** wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, spełniających powyższe warunki. Wynik **podaj** w postaci ułamka bez niewymierności w mianowniku.

10. Okres T drgań wahadła w pewnym zegarze dany jest wzorem: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, gdzie l oznacza długość wahadła, a g oznacza przyspieszenie grawitacyjne. **Przyjmij** do obliczeń, że przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi wynosi $g_Z=9{,}81\,m/s^2$, a przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi $g_K=1{,}62\,m/s^2$. **Oblicz** $\frac{T_K}{T_Z}$ – stosunek okresu drgań tego wahadła, gdyby znajdowało się ono na Księżycu, do okresu drgań tego samego wahadła znajdującego się na Ziemi. **Wynik** podaj z dokładnością do 0,01.

10. A) Dane są liczby $x=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}$ i $y=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$. **Uzasadnij**, że $x<y$.

11. Dane są liczby $a=3{,}6\cdot 10^{-12}$ oraz $b=2{,}4\cdot 10^{-20}$. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

    Ich iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy:

    A. $8{,}64\cdot 10^{-32}$ **B.** $1{,}5\cdot 10^{-8}$ **C.** $1{,}5\cdot 10^{8}$ **D.** $8{,}64\cdot 10^{32}$

11. A) **O ile** procent liczba x jest większa od liczby y, jeżeli $x=\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right):\left(\frac{11}{20}-0{,}2\right)$, $y=(0{,}5\cdot 3)^{-2}\cdot 2^3\cdot 3^{-1}$?

12. Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej. **Dokończ** zdania. **Zaznacz** odpowiedź spośród **A–D** oraz odpowiedź spośród **E–H**.

18. 1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y

A. o 40% pensji pana Y. **B.** o 90% pensji pana Y.

C. o 150% pensji pana Y. **D.** o 275% pensji pana Y.

18. 2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X

E. o 60% pensji pana X. **F.** o 73% pensji pana X.

G. o 90% pensji pana X. **H.** o 150% pensji pana X.

13. Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$. **Wyznacz** p, jeśli w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki.

14. Cena brutto kurtki zimowej wynosi 307, 50 zł. Na cenę tę składa się cena netto oraz 23% podatku VAT. **O ile** zmniejszy się cena netto tej kurtki, jeśli po obniżce ceny podatek VAT będzie wynosił 51,75 zł?

15. Świeżo skoszona trawa zawiera 60% wody, a wysuszone siano tylko 15% wody. **Oblicz**, ile kilogramów wysuszonego siana można otrzymać z 1 tony świeżo skoszonej trawy? Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych kilogramów.

16. **Ile** kilogramów wody należy dodać do 0,5 kg 30 procentowego roztworu soli, aby otrzymać roztwór pięcioprocentowy?

17. W 1995 roku zbiory kawy na świecie wynosiły 5489 tys. ton, a w roku 2001 - 7300 tys. ton. W Wietnamie zebrano w 1995 roku 4%, a w 2001 roku 12, 3% światowego zbioru kawy. **O ile** punktów procentowych zbiory kawy w Wietnamie były większe w 2001 roku w porównaniu z 1995 rokiem. **O ile** procent wzrosły zbiory kawy w Wietnamie w 2001 roku w porównaniu z rokiem 1995?

17. A) Liczba osobników pewnego zagrożonego wyginięciem gatunku zwierząt wzrosła w stosunku do liczby tych zwierząt z 31 grudnia 2011 roku o 120% i obecnie jest równa 8910. **Oblicz** ile zwierząt liczyła populacja tego gatunku w ostatnim dniu 2011 roku.

18. Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3% w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

Dokończ zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%)

A. 30% **B.** 34% **C.** 36% **D.** 43%

19. **Wykaż**, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

20. **Wykaż**, że iloczyn:
    a) trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,
    b) trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48,

20. A) **Wykaż**, że iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

20. B) **Wykaż**, że liczba postaci $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

21. **Wykaż**, że liczba postaci $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 13.

22. **Wykaż**, że liczba $m = 5^{97} + 5^{98} + 5^{99} + 5^{100}$ dzieli się przez dwie kolejne liczby naturalne.

22. A) **Wykaż**, że liczba $m = 5^{97} + 5^{98} + 5^{99} + 5^{100}$ dzieli się przez dwie kolejne liczby naturalne dwucyfrowe.

23. **Wykaż**, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(2n+1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8.

23. A) **Udowodnij**, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej k liczba $k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k$ jest liczbą podzielną przez 12. **Zapisz** pełny tok rozumowania.

23. B) **Udowodnij**, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

24. **Udowodnij**, że każda liczba całkowita *k*, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

24. A) Liczbą palindromiczną nazywamy liczbę naturalną, która czytana z prawej do lewej lub z lewej do prawej daję tę samą liczbę np.: 5225. **Udowodnij**, że liczba czterocyfrowa palindromiczna jest podzielna przez 11.

24. B) **Wykaż**, że liczba $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2022} + 2^{2023}$ jest liczbą podzielną przez 3 i nie jest liczbą podzielną przez 6.

24. C) **Udowodnij**, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

24. D) Niech a, b będą liczbami całkowitymi, dla których zachodzi równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$. **Wykaż**, że jeśli 5 jest dzielnikiem liczby $a - b$, to 25 również jest dzielnikiem liczby $a - b$.

24. E) Rozpatrzmy liczby naturalne większe od 1000, w których zapisie występuje tylko cyfra 1:

$$a = \underbrace{11\ldots111}_{n}$$

Wykaż, że jeśli liczba a zapisana za pomocą n jedynek jest liczba pierwszą, to liczba n również jest liczba pierwszą.