1. **Wyznacz** długości boków trójkąta prostokątnego ABC oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\measuredangle CAB$ mając dane $\sin\measuredangle(CAB) = \frac{4}{5}$ i $|BC| = 2$.

2. **Wyznacz** wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym dana przyprostokątna jest dwa razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

2. A) Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy 1 dm, 2 dm i wysokości 30 cm. **Podaj** wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.

3. **Oblicz** długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeżeli α jest jednym z dwóch kątów ostrych trójkąta oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ i długość przeciwprostokątnej równa jest 15 cm.

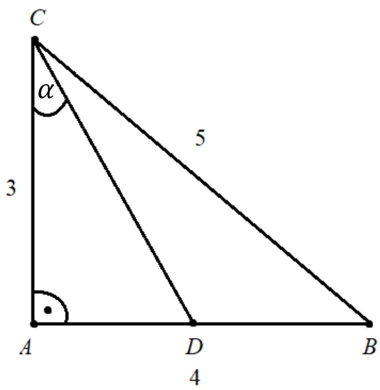
4. **Wyznacz** wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

   a) $\sin(90° - \alpha) = \frac{3}{10}$,

   b) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \frac{2}{5}$.

5. **Dokończ zdania. Zaznacz** odpowiedź spośród **A–D** oraz odpowiedź spośród **E–H**.

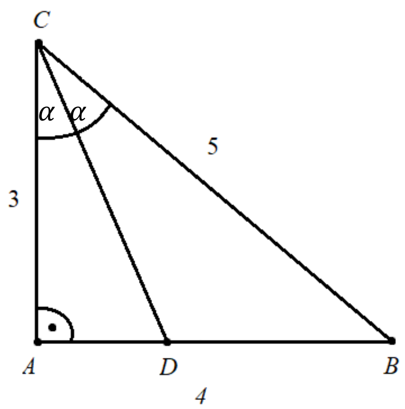
   Odcinek CD jest środkową w trójkącie prostokątnym ABC takim jak na rysunku o bokach długości 3, 4, 5.
   Wtedy



   A. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

   C. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

   Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB trójkąta prostokątnego ABC takiego jak na rysunku o bokach długości 3, 4, 5.
   Wtedy



   E. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. **F.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

   G. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. **H.** $\operatorname{tg}\alpha = 1$.

6. **Dokończ zadanie. Zaznacz** dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

   Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, wtedy

   A. $0° < \alpha < 30°$. **B.** $30° < \alpha < 45°$. **C.** $45° < \alpha < 60°$.

   D. $60° < \alpha < 90°$. **E.** $\cos\alpha = \frac{4}{13}$. **F.** $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

   G. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{17}{13}$.

7. Czy istnieje kąt α, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \sin(90° - \alpha) = \frac{1}{2}$,

b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5} - 2 \ \wedge \ \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5} + 2$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \ \wedge \ \sin\alpha = \frac{3}{5}$,

d) $3\cos\alpha - 2 = 6$,

e) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ \wedge \ \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

7. A) **Wyznacz** kąty trójkąta prostokątnego wiedząc, że:

a) iloczyn sinusa jednego kąta ostrego i cosinusa drugiego kąta ostrego wynosi $\frac{1}{4}$.

b) kwadrat odwrotności tangensa kąta ostrego wynosi 3.

7. B) W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę α. **Oblicz** $\sin\alpha\cos\alpha$.

8. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$. **Oblicz** wartość wyrażenia 2sin α cos α.

9. Kąt $\alpha \in (0°, 180°)$ oraz wiadomo, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 2$ przyjmuje wartość

A. 4 **B.** $3\frac{1}{2}$ **C.** 3 **D.** $2\frac{1}{2}$

10. Kąt α jest ostry oraz $4\operatorname{tg}\alpha = 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 4

10. A) Korzystając z tożsamości $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ **wyznacz** wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}$.

10. B) Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 2$, **oblicz** wartość wyrażenia $\frac{4\cos\alpha - \sin\alpha}{3\cos\alpha + 5\sin\alpha}$.

10. C) **Oblicz** $a - b$, gdy $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, $b = 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60°$.

11. Wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}60° - 4\sin^2 60°}{\cos^2 40° + \cos^2 50°}$ **sprowadź** do najprostszej postaci.

12. Liczba $3\cos^2 67° + 2\cos^2 23° + \sin^2 67°$ jest równa

A. 3 **B.** 1 **C.** $\cos^2 67°$ **D**. $2\sin^2 23°$

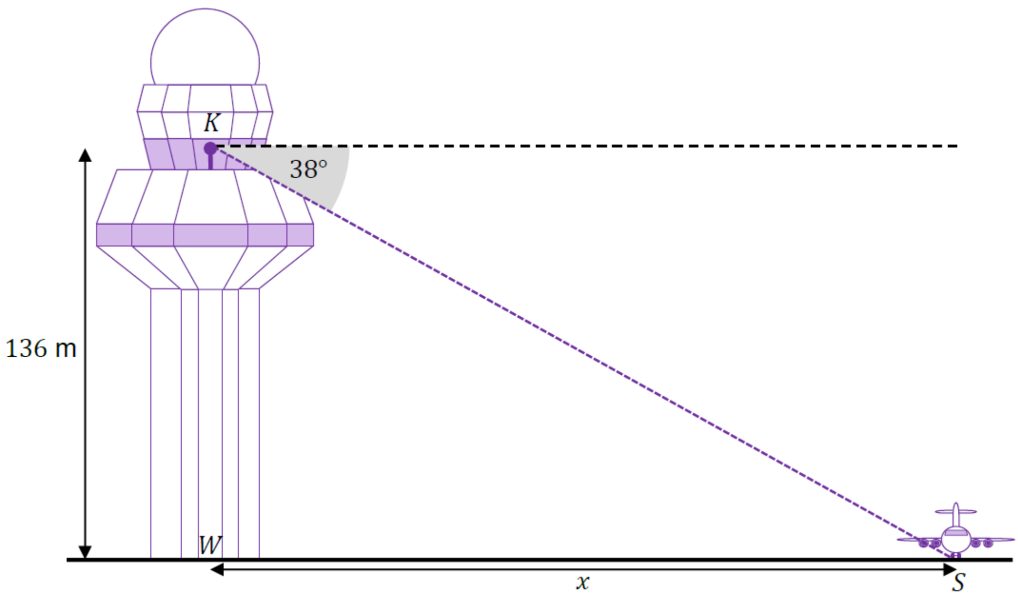
13. Kąt $\alpha \in (0°;\ 180°)$ i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. **Oblicz** wartość wyrażenia $\sin\alpha\cos\alpha$.

14. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. **Wykaż**, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

14. A) **Wykaż**, że gdy α i β są kątami ostrymi trójkąta prostokątnego, to $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = 1$.

14. B) Drabina tworzyła ze ścianą domu kąt 60° i jej koniec sięgał na wysokość 2,5 m domu. Po zmianie położenia drabiny tworzy ona z ziemią kąt 60°. Ile metrów, licząc od podłoża, sięga obecnie drabina? Wynik **podaj** z dokładnością do 0,1 m.

15. Z okna wieży kontroli lotów widać startujący samolot S pod kątem 38° do poziomu. Kontroler K znajduje się na wysokości 136 m od płyty lotniska (zobacz rysunek).



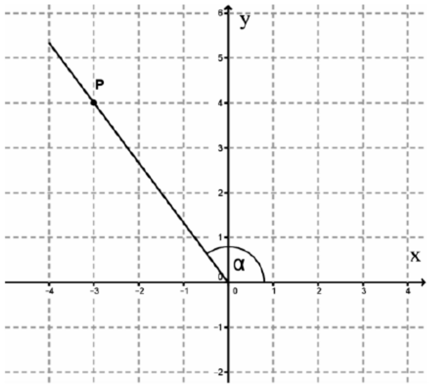
Oblicz odległość x samolotu S od podstawy W tej wieży. Wynik **podaj** w zaokrągleniu do pełnych metrów. **Zapisz** obliczenia.

16. Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90° < \alpha < 180°$.

Oceń prawdziwość poniższych zadań. **Zaznacz** **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.	**P**	**F**
2.	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\lvert\mathrm{tg}\,\alpha\rvert = \frac{3}{4}$.	**P**	**F**

17. Na rysunku przedstawiono kąt α, którego końcowe ramię przechodzi przez punkt $P = (-3, 4)$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań . **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.



1.	Dla kąta α zachodzi równość spełnione $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{12}{25}$.	**P**	**F**
2.	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.	**P**	**F**

18. **Wybierz** zdanie prawdziwe **A, B** albo **C** oraz zdanie **1., 2.** albo **3.** uzasadniające takie stwierdzenie.

A.	$\sin 150° + \sin 30° = 1$	**1.**	$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\cos 60° = \frac{1}{2}$
B.	$\cos 150° \cdot \cos 30° = \frac{3}{4}$	**2.**	$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$
C.	$\cos 120° + \sin 120° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	**3.**	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$ $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Poziom rozszerzony

19. (R) **Naszkicuj** w układzie współrzędnych kąt α taki, że:

a) $\sin\alpha = -\frac{1}{3} \ \wedge \ \alpha \in \langle 270°; 360° \rangle$,

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$,

c) tg α = 2 $\wedge \ \alpha \in \langle 180°; 270° \rangle$,

d) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{3}$.

20. (R) **Wyznacz** wartości funkcji trygonometrycznych kąta:

a) $\beta = 120°$,

b) $\beta = 210°$,

c) $\beta = 315°$.

21. (R) **Oblicz:**

a) $\sin 765°$, d) $\operatorname{tg}\frac{13}{3}\pi$, g) $\sin(-1710°)$,

b) $\operatorname{tg}(-750°)$, e) $\cos(-450°)$, h) $\operatorname{ctg}(-1395°)$,

c) $\sin(-7\pi)$, f) $\cos\frac{15}{2}\pi$, i) $\operatorname{ctg}(-\frac{23}{4}\pi)$,

22. (R) **Wyznacz** wartości funkcji trygonometrycznych kąta x, gdy:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \ \wedge \ x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$,

b) $\operatorname{tg} x = -3 \ \wedge \ x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

c) $\cos x = \frac{2}{3}$.

23. (R) Miary pięciu kątów tworzą ciąg arytmetyczny. Drugim wyrazem tego ciągu jest 150° a czwartym 270°. **Oblicz** sumę sinusów tych pięciu kątów.

23. A) (R) **Wykaż**, że $\frac{-\cos 2x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ nie jest tożsamością.

24. (R) **Sprawdź** czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną:

a) $1 - \cos x = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x}$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ k \in Z$,

b) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = \left(\frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}\right)^{-1}$,

c) $\cos x\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = -1$ dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

d) $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right) \wedge k \in Z$.

24. A) (R) **Wykaż**, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość: $4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1 + 3\cos^2 2\alpha$.

25. (R) Na podstawie wzoru: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, **oblicz** $\sin 75°$.

26. (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $\cos 3x = \sin\frac{5}{6}\pi$,

b) $\operatorname{tg} x = \sin x$, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

26. A) (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$,

b) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $x \in (-\pi; 0)$.

27. (R) **Wyznacz** wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

28. (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $\sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$,

b) $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$,

c) $2\sin 5x \sin 3x = 1 - \cos 8x$,

d) $(\cos x)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$,

e) $\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

f) $6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$,

g) $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$ dla $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$,

h) $4\sin 4x \cos 6x = 2\sin 10x + 1$,

i) $\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$,

28. A) **Rozwiąż** równanie:

a) $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0; \pi\rangle$,

b) $\frac{5\cos^2 x + \sin x - 1}{1 - \sin^3 x} = 2$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$,

c) $\sin^2 2x + 1 = 7\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi\rangle$.

29. (R) **Rozwiąż** nierówność:

a) $(2 - \cos x)^2 \leq 4\sin^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4{,}75$ w zbiorze $(0; 2\pi)$,

b) $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $\langle 0{,}2\pi\rangle$.

29. A) (R) **Wyznacz** dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{1 - 2\cos\frac{x}{2}}$.

29. B) (R) **Rozwiąż** algebraicznie i **graficznie** nierówność $|\cos x| + \cos x > 1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$.

30. (R) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ dla $x \in (0;\ \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.

a) **Naszkicuj** wykres funkcji f.

b) **Wyznacz** miejsca zerowe funkcji f.

30. A) (R) Dana jest funkcja: $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x,\ x \in R$.

a) **Naszkicuj** wykres funkcji f.

b) **Rozwiąż** równanie $f(x) = 1$.

30. B) (R) a) **Naszkicuj** wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $\langle -2; 2\pi\rangle$.

(R) b) **Naszkicuj** wykres funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale$\langle -2\pi; 2\pi\rangle$ i **zapisz**, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

30. C) (R) **Naszkicuj** wykres funkcji $f(x) = \sin 2x\,|\operatorname{tg} x|$. Z wykresu **odczytaj** i **zapisz** rozwiązanie równania $f(x) = 1$.

30. D) (R) **Naszkicuj** wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos x + |\sin x|}{\cos x}$ dla $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. **Podaj** zbiór rozwiązań nierówności $0 \leq f(x) < 2$.

31. (R) a) Dla jakich wartości parametru m równanie $3\cos x - 2 = m$ ma rozwiązanie.
(R) b) Dane jest równanie $\sin x = a^2 + 1$, z niewiadomą x. **Wyznacz** wszystkie wartości parametru a, dla których dane równanie nie ma rozwiązań