

1. **Wykonaj** działania na potęgach:

a) $\left(108^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}},$

b) $\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5,$

c) $\frac{3^{27} + 3^{26}}{3^{26} + 3^{25}},$

d) $50001^2 - 49999^2,$

e) $\left(\sqrt[3]{5} - 1\right)^3,$

f) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}.$

2. **Przedstaw** w postaci potęgi:

a) $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{x^5} (x\sqrt{x})^3$ i **podaj** konieczne założenia,

b) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},$

c) $2^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^5}.$

3. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Połowa sumy $4^{28} + 4^{28} + 4^{28} + 4^{28}$ jest równa

A. $2^{30}.$

B. $2^{57}.$

C. $2^{63}.$

D. $2^{112}.$

4. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba naturalna $n = 2^{14} \cdot 5^{15}$ w zapisie dziesiętnym ma

A. 14 cyfr.

B. 15 cyfr.

C. 16 cyfr.

D. 30 cyfr.

5. **Sprawdź**, czy ciąg:

a) $(\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2, \sqrt{5} - 2, \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)$ jest ciągiem arytmetycznym,

b) $(16, 2^{x-1}, 4^{x-3})$ jest ciągiem geometrycznym.

6. Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = a^x$ (gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$), należy punkt $P = (2, 9)$. **Oblicz** a i **zapisz** zbiór wartości funkcji g , określonej wzorem $g(x) = f(x) - 2$.

7. **Naszkiuj** wykres funkcji:

a) $y = 4^{-x} - 4,$

b) $y = \frac{2^x}{2} - 3,$

c) $f(x) = 2^x - 1$ określonej w przedziale $\langle -2; 2 \rangle,$

d) $f(x) = 2^{x-1}$ określonej w przedziale $\langle -2; 2 \rangle.$

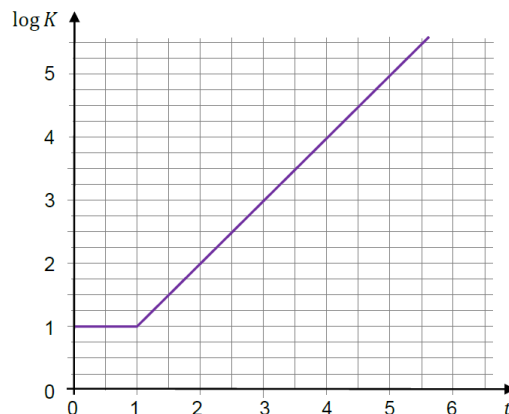
8. **Wykonaj** wykres funkcji $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ i **podaj** miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.

15. Na wykresie przedstawiono zależność $\log K(t)$, gdzie $K(t)$ jest liczbą bakterii w próbce po czasie t wyrażonym w godzinach, jaki upłynął od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

Dokończ zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Gdy upłynęły dokładnie trzy godziny od chwili $t = 0$, liczba K bakterii była równa

- A. 3 B. 100 C. 1000 D. 10000



Poziom rozszerzony

16. (R) **Sporządź** wykres funkcji:

a) $f(x) = -|x + 4|^{\frac{1}{2}} + 2$,

b) $f(x) = -(x + 3)^{-1} - 2$,

c) $f(x) = (x - 2)^3 - 4$.

17. (R) **Narysuj** w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g opisane wzorami: $f(x) = 2^{x-1}$ i $g(x) = |2x + 1|$ oraz na podstawie ich wykresów **odczytaj** liczbę rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.

18. (R) **Naszkiuj** wykres funkcji f . **Odczytaj** z wykresu zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = |4 - 2^x|$,

b) $f(x) = 3^{|x|} - 3$,

c) $f(x) = |-2^{|x|-1} - 4|$. **Wyznacz** punkty wspólne wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.

19. (R) **Rozwiąż** graficznie równanie:

a) $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$,

b) $2|x| = 3^x - 1$.

20. (R) **Naszkiuj** wykresy funkcji $f(x) = 9 \cdot 3^{x-4} + 5$ i $g(x) = \left| \frac{x+2}{x-2} \right|$. Na podstawie tego rysunku **określ** liczbę rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.

21. (R) Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym; pierwsze z prędkością $v_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t-1} \left[\frac{cm}{s}\right]$, a drugie z prędkością $v_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-t} \left[\frac{cm}{s}\right]$, gdzie t oznacza czas liczony w sekundach od początku obserwacji tych ciał. Kiedy stosunek v_1 do v_2 jest mniejszy od $\frac{32}{243}$?

22. (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $4^x = 8 \cdot 2^x$,

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}$,

c) $\frac{3^{x-3}}{27} = 9^{2x+2}$,

d) $0,4^x = 2,5^{x-6}$,

e) $7^{x-2} \cdot 16^x = 2^{3x+2}$,

f) $3^{x+2} - 3^x = 72$,

g) $5^x + 5^{3-x} = 30$.

23. (R) **Rozwiąż** nierówność:

a) $16^x - 4^x \leq 0$,

b) $25 \cdot (0,2)^{x^2} < 5^x$,

c) $0,3^x \geq 0,09$,

d) $2^{x+2} - 2^x < 48$,

e) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x-2} \geq 81^{1-x^2}$.

24. (R) **Rozwiąż** nierówność: $h(g(x)) \geq \frac{1}{16}$, jeżeli $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = x^2 - 5$.

25. (R) **Określ** dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4} + \frac{1}{\sqrt{27-3^x}}$.

26. (R) Dane są liczby $a = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25$ i $b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8}$. **Oblicz** a^{b+1} .

27. (R) **Oblicz** wartość wyrażenia

a) $3^{\log_{\sqrt{3}} 27}$,

b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^{\log_{4\sqrt{2}} 32}$,

c) $\log_8 3^{3 \log_3 2 - \log_{27} 8 - \log_9 4}$,

d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_{25} 27}{\log_7 \sqrt[6]{49}}$.

Zapisz obliczenia.

28. (R) Dane są liczby $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 7$. **Wyraź** $\log_4 49$ za pomocą liczb a oraz b . **Zapisz** obliczenia.

29. (R) Niech $\log_2 18 = c$. **Wykaż**, że $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$.

30. (R) **Wyznacz** $\log_{16} 6$ jeżeli wiesz, że $\log_2 12 = a$.

31. (R) Wiedząc, że $\log_c m = 2$, $\log_b m = 5$, $\log_a m = 10$. **Oblicz** $\log_{abc} m$.

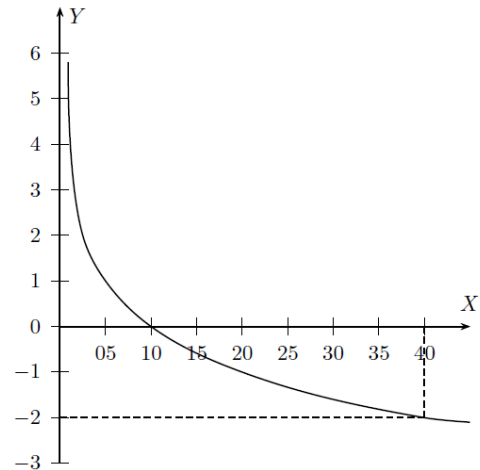
32. (R) **Wykaż**, że dla $a > 1$ i $x > 1$ zachodzi nierówność $\log_a x + \log_x a \geq \log 100$.
33. (R) Dodatkowo liczby rzeczywiste a i b takie, że $a > b$, spełniają warunek $\log_2 \left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.
Wykaż, że dla liczb a i b prawdziwa jest równość $a^2 + b^2 = 11ab$.

34. (R) **Wyznacz** dziedzinę funkcji f oraz **podaj** jej miejsca zerowe.

a) $f(x) = \log_{0,1}|x - 7|$,

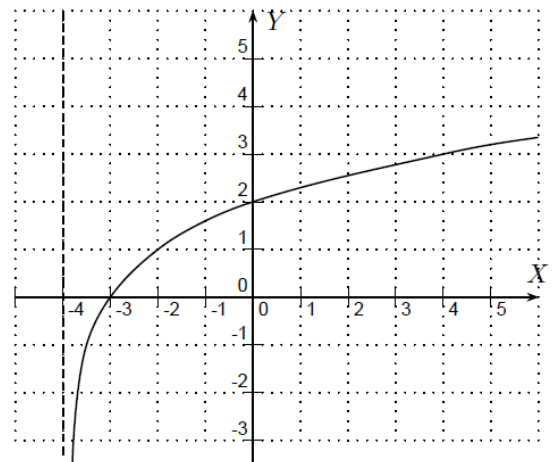
b) $f(x) = \log_2(x^2 - 3x)$.

35. (R) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej f . **Rozwiąż** równanie $(f(x))^2 - 16 = 0$.



36. (R) **Naszkicuj** wykres funkcji $f(x) = \log_2(-x^3 - 5x^2 - 3x + 9) - \log_2\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$.
37. (R) Dziedziną funkcji f opisanej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) - p$ jest przedział $(-3, \infty)$. Wiedząc, że do wykresu funkcji f należy punkt $A = 1, -4$, **oblicz** wartość parametru p . Następnie:
a) **naszkicuj** wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$,
b) **wyznacz** zbiór wszystkich wartości parametru k , dla których równanie $g(x) = k$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

38. (R) Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.
a) **Podaj** wartość p .
b) **Narysuj** wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.
c) **Podaj** wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.



39. (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $\log(x + 1,5) = -\log x$,

b) $\log_2 x + 1 = 2 \log_x 2$,

c) $\log_x(3x + 4) = 2$,

d) $x^{1+\log_2 x} = 4$.

40. (R) **Rozwiąż** nierówność:

a) $\log_3|x + 3| < 0$,

b) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{5}}(x - 1)\right) > 1$,

c) $\log_{0,5}(x + 4) - \log_{0,5}(3x - 1) \leq 0$,

d) $\log_x(x + 2) \leq 2$.

41. (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $\log_5(\log_4(\log_2 x)) = 0$,

b) $\log_{\frac{1}{4}} x \cdot \log_2 x = -\frac{1}{2}$,

c) $1 + \log_8 x + (\log_8 x)^2 + (\log_8 x)^3 + \dots = 3$.