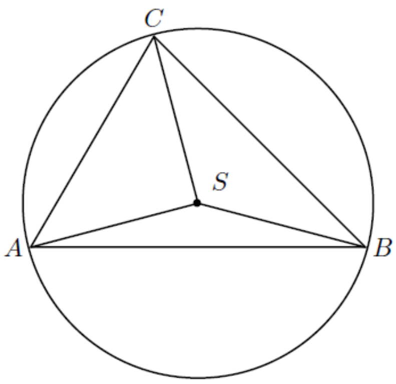
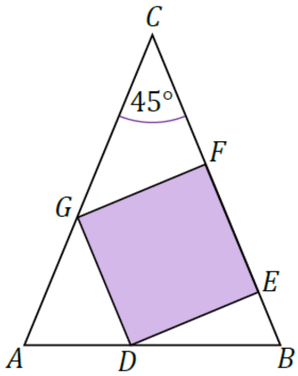
1. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. $\sphericalangle ACS$ jest trzy razy większy od $\sphericalangle BAS$, a $\sphericalangle CBS$ jest dwa razy większy od $\sphericalangle BAS$. **Oblicz** kąty trójkąta ABC.



2. Dane są trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ i $|\sphericalangle ACB| = 45°$, oraz kwadrat $DEFG$ o polu równym 1. Wierzchołki E i F kwadratu leżą na ramieniu BC danego trójkąta, wierzchołek G leży na ramieniu AC, a wierzchołek D leży na podstawie AB trójkąta (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych relacji. Wybierz **P**, jeśli relacja jest prawdziwa, albo **F** – jeśli jest fałszywa.

1.	$\sphericalangle AGD\| = 45°$	**P**	**F**
2.	$\|AG\| - \|BE\| = 2 - \sqrt{2}$	**P**	**F**

3. Dany jest trójkąt równoramienny, który nie jest równoboczny. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt H jest jego ortocentrum. **Wybierz** dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

A. Punkt O jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.

B. Punkt O jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.

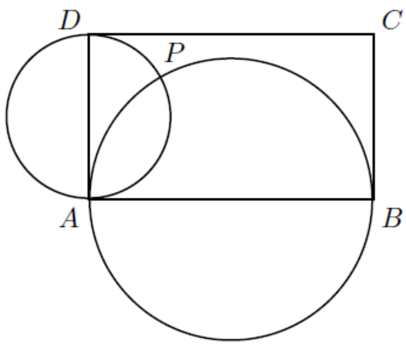
C. Punkt O jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.

D. Punkt H jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.

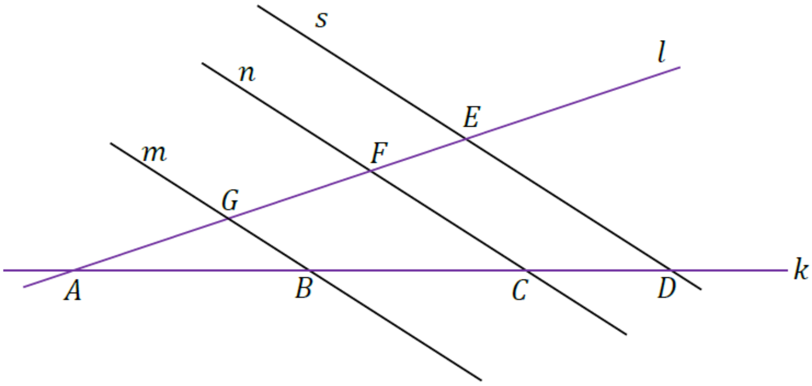
E. Punkt H jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.

F. Punkt H jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.

4. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (rys.). **Wykaż**, że punkty B, P, D leżą na jednej prostej.



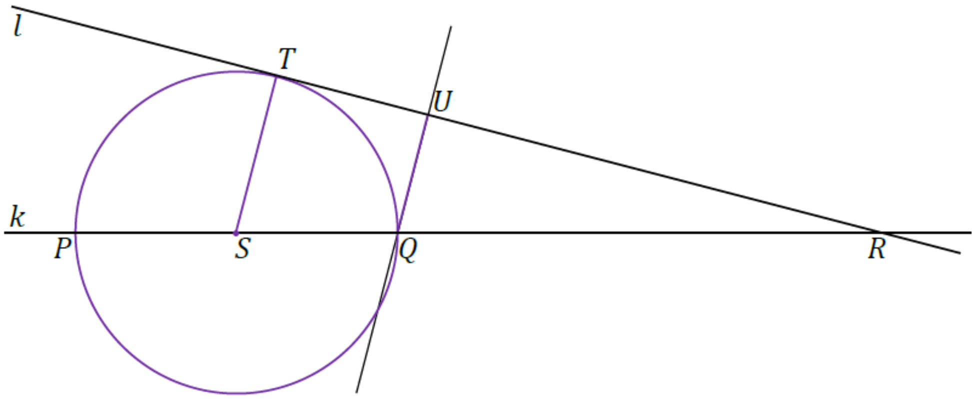
5. Proste k i l przecinają się w punkcie A. Proste m, n i s są do siebie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B, C, D, E, F, G (zobacz rysunek poniżej), w taki sposób, że: $|BC| = 30$, $|CD| = 20$.



Oblicz długość odcinka FE.

6. Dane są:
 • okrąg o środku S i promieniu $r = 1$
 • prosta k przechodząca przez S i przecinająca okrąg w punktach P i Q
 • prosta l styczna do danego okręgu w punkcie T.

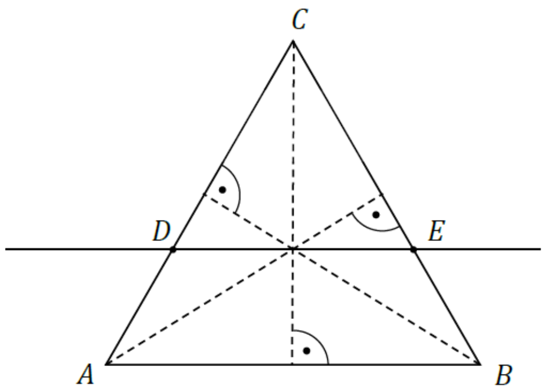
 Prosta k przecina prostą l w punkcie R. Prosta przechodząca przez punkt Q i równoległa do odcinka ST przecina styczną l w punkcie U (zobacz rysunek).



Oblicz długość odcinka TU wiedząc, że spełniony jest warunek $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$. **Zapisz** obliczenia.

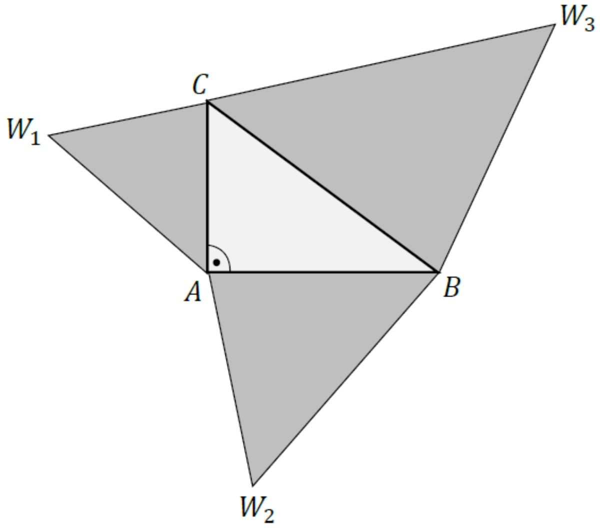
7. Przez punkt przecięcia wysokości trójkąta równobocznego ABC poprowadzono prostą DE równoległą do podstawy AB (zobacz rysunek). Stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta CDE jest równy

A. 9 : 4 **B.** 4 : 1 **C.** 4 : 9 **D.** 3 : 2



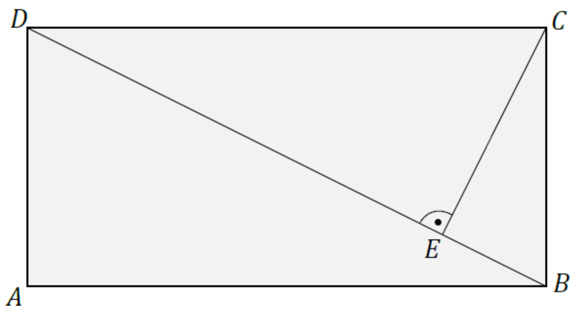
8. **Wykaż**, że wysokość CD trójkąta prostokątnego ABC poprowadzona z wierzchołka C kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki AD i DB, których stosunek długości jest równy stosunkowi kwadratów długości przyprostokątnych odpowiednio AC i BC tego trójkąta.

9. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo to twierdzenie. Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Niech każdy z boków tego trójkąta: CA, AB, BC będzie podstawą trójkątów podobnych, odpowiednio: CAW_1, ABW_2, CBW_3. Trójkąty te mają odpowiadające sobie kąty o równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W_1, W_2, W_3.
Pola trójkątów: $CAW1$, $ABW2$, $CBW3$ oznaczymy odpowiednio jako P_1, P_2, P_3.



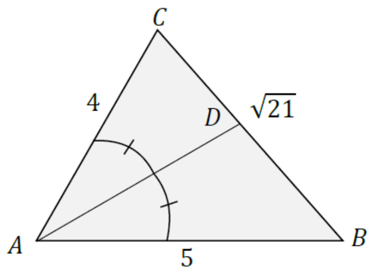
Udowodnij, że: $P_3 = P_1 + P_2$.

10. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 2$. Kąt BDA ma miarę α, taką, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Przekątna BD i prosta przechodząca przez wierzchołek C prostopadła do BD przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).



Oblicz długość odcinka $|CE|$.

11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 5$, $|BC| = \sqrt{21}$, $|AC| = 4$. Dwusieczna kąta $\sphericalangle CAB$ przecina bok BC w punkcie D (zobacz rysunek).



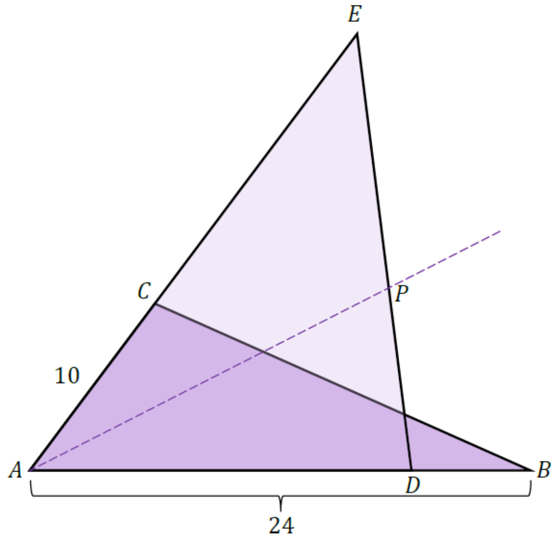
Dokończ zdanie. **Zaznacz** odpowiedź **A**, **B** albo **C** oraz jej uzasadnienie **1.**, **2.** albo **3.**

Długość odcinka BD jest równa

A.	$\lvert BD\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{21}$,	ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że	**1.**	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert} = \frac{\lvert BC\rvert}{\lvert BD\rvert}$
B.	$\lvert BD\rvert = \frac{5}{9}\sqrt{21}$,		**2.**	$\lvert BD\rvert = \lvert DC\rvert$
C.	$\lvert BD\rvert = \frac{4}{5}\sqrt{21}$,		**3.**	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert} = \frac{\lvert BD\rvert}{\lvert DC\rvert}$

12. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|AB| = 8$ i $|AC| = 6$. Dwusieczna kąta prostego CAB przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D, natomiast dwusieczna kąta ACB przecina przyprostokątną AB w punkcie E. Proste AD i CE przecinają się w punkcie F. **Udowodnij**, że $|CF| = 2|FE|$.

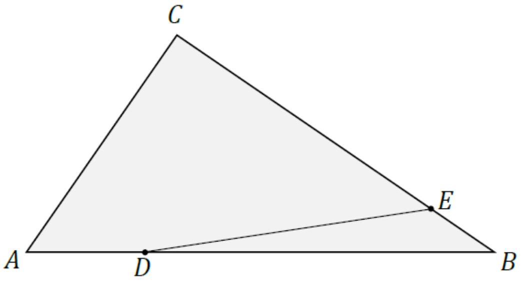
13. Dane są dwa trójkąty ABC i ADE o wspólnym kącie ostrym przy wierzchołku A. Ponadto $|AB| = 24$, $|AC| = 10$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta ADE jest dwukrotnie większe od pola trójkąta ABC.



13.1. Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek DE w punkcie P, takim że $\frac{|DP|}{|PE|} = \frac{3}{4}$. **Oblicz** długości boków AD i AE trójkąta ADE. **Zapisz** obliczenia.

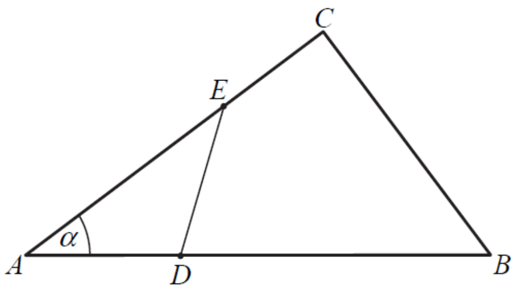
13.2. Pole trójkąta ABC jest równe 72. **Oblicz** długość boku BC trójkąta ABC. **Zapisz** obliczenia.

14. Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB tego trójkąta wybrano punkt D, taki, że $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, a na boku BC wybrano taki punkt E, że $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$ (zobacz rysunek poniżej). Pole trójkąta ABC jest równe 20.



Oblicz pole trójkąta DBE.

15. W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$ oraz $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, gdzie $\alpha = |\measuredangle BAC|$. Na bokach AB i AC tego trójkąta obrano punkty odpowiednio D i E takie, że $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole:

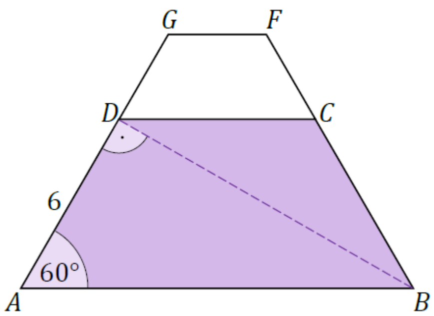
a) trójkąta ADE,

b) czworokąta $BCED$.

16. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45° , a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. **Oblicz** wysokość tego rombu.

17. **Oblicz** obwód rombu, którego pole jest równe 384, a stosunek długości przekątnych wynosi 3 : 4.

18. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD, gdzie $|AB| > |CD|$. Kąt ostry tego trapezu ma miarę 60°, a przekątna jest prostopadła do ramienia, którego długość jest równa 6. Oba ramiona tego trapezu przedłużono, otrzymując trapez $DCFG$ podobny do trapezu $ABCD$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole trapezu $DCFG$. **Zapisz** obliczenia.

19. Dany jest trapez równoramienny, którego ramię ma długość 6 i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 60°. Podstawa ta ma długość 10.

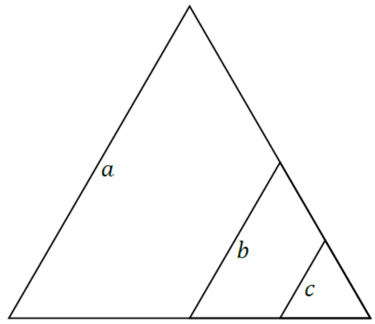
a) **Oblicz** obwód i pole trapezu.

b) **Oblicz** długość przekątnej trapezu.

c) **Oblicz** odległość punktu przecięcia się przekątnych od dłuższej podstawy.

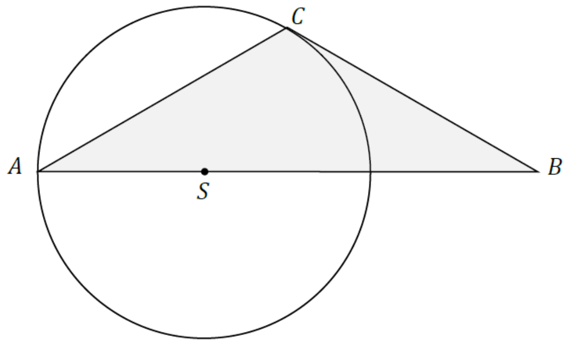
20. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $|AD| = |AB| = |BC| = a$, $|\sphericalangle BAD| = 60°$ i $|\sphericalangle ADC| = 135°$. **Oblicz** pole czworokąta $ABCD$.

21. W trójkącie równobocznym o boku długości a poprowadzono dwa odcinki równoległe do jednego z jego boków. Długości tych odcinków są równe b i c, przy czym $c < b < a$ (zobacz rysunek). Odcinki podzieliły trójkąt równoboczny na trzy figury: dwa trapezy i trójkąt.

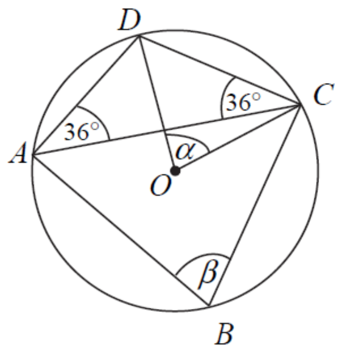


Wykaż, że stosunek pola trapezu o podstawach b i c do pola trapezu o podstawach a i b jest równy $\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}$.

22. Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r. Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek poniżej). Długości boków AB i AC są równe odpowiednio $|AB| = 3r$ oraz $|AC| = \sqrt{3}r$. **Oblicz** miary wszystkich kątów trójkąta ABC.

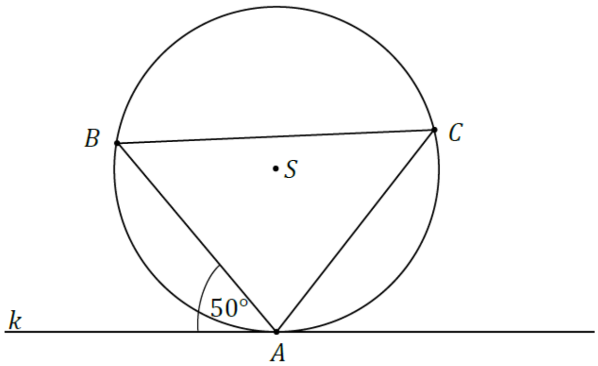


23. Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.
Miary zaznaczonych kątów α i β są odpowiednio równe



A. $\alpha = 36°, \beta = 72°$ **B.** $\alpha = 54°, \beta = 72°$
C. $\alpha = 36°, \beta = 108°$ **D.** $\alpha = 72°, \beta = 72°$

24. Dane są okrąg o środku S oraz prosta k styczna do okręgu w punkcie A. Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu. Miara kąta ostrego pomiędzy prostą k a cięciwą AB jest równa 50°. Punkt C leży na okręgu. Kąt $\sphericalangle BCA$ jest ostry. Sytuację przedstawia rysunek poniżej.

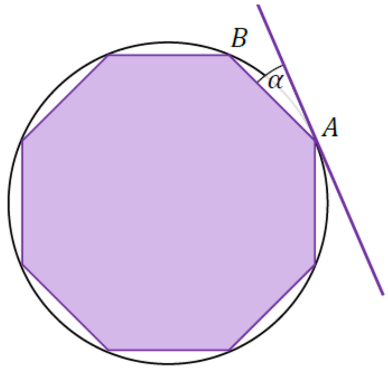


Dokończ zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta $\sphericalangle BCA$ jest równa

A. 100° **B.** 80° **C.** 50° **D.** 40°

25. Dany jest ośmiokąt foremny wpisany w okrąg K. Punkty A oraz B są sąsiednimi wierzchołkami tego ośmiokąta oraz α jest kątem między styczną do okręgu K w punkcie A i bokiem AB wielokąta (zobacz rysunek).

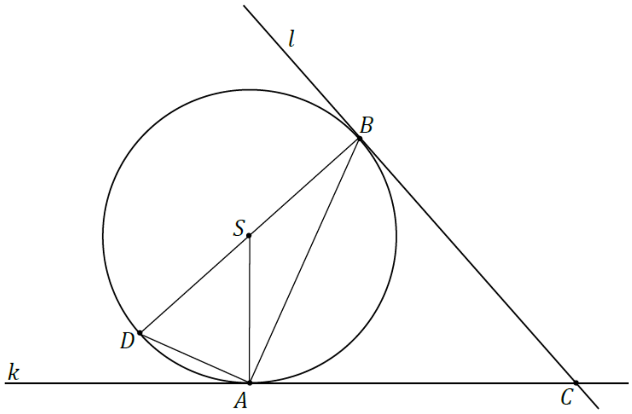


Dokończ zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta α jest równa

A. 45° **B.** 30° **C.** 22,5° **D.** 15°

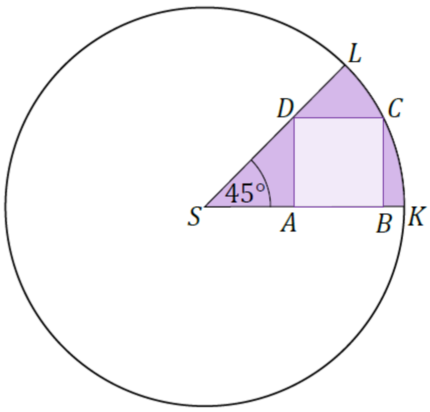
26. Trzy różne punkty A, B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S. Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punkcie C (zobacz rysunek poniżej).



Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.

27. W wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy KSL o mierze 45° wpisano kwadrat $ABCD$ w taki sposób, że wierzchołki A oraz B leżą na promieniu SK, wierzchołek D leży na promieniu SL, a wierzchołek C leży na łuku $\widehat{KL}$ (zobacz rysunek).

Oblicz stosunek pola kwadratu $ABCD$ do pola wycinka kołowego KSL. **Zapisz** obliczenia.

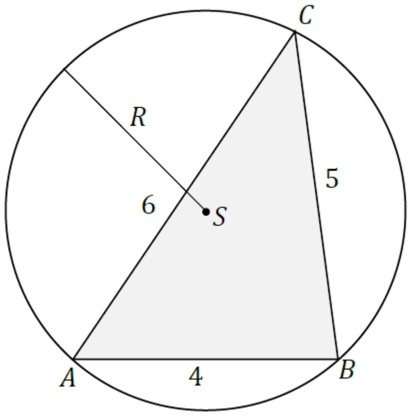


28. W trójkącie prostokątnym ACB przyprostokatna AC ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. **Oblicz** pole trójkąta ACB.

29. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. **Oblicz** długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

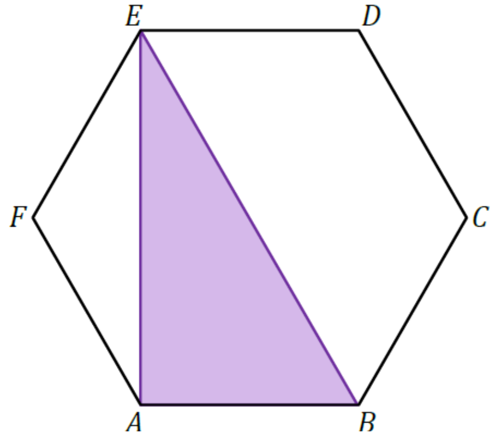
30. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa 36, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 10. **Oblicz** długości boków tego trójkąta i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

31. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$. Na tym trójkącie opisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu R (zobacz rysunek). **Oblicz** promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC.



32. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB, taki że $\sin|\sphericalangle BAC| = 0,3$ i $|AC| = 7$. **Oblicz** pole koła opisanego na tym trójkącie.

33. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o polu równym $6\sqrt{3}$ (zobacz rysunek).



33. 1. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole trójkąta ABE jest równe

A. 6 **B.** $4\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** 4

33. 2. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka AE jest równa

A. 2 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** 4

34. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 10$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. **Wybierz P**, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Cosinus kąta ABC jest równy $(-0{,}65)$.	**P**	**F**
2.	Trójkąt ABC jest rozwartokątny.	**P**	**F**

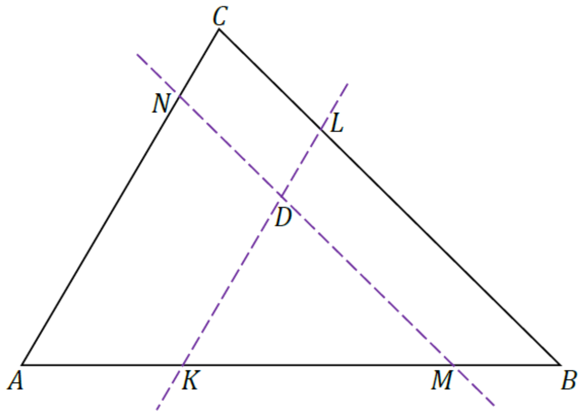
35. W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz miara kąta $|\sphericalangle ABC| = 60°$. **Oblicz** długość środkowej tego trójkąta, poprowadzonej z wierzchołka A.

Poziom rozszerzony

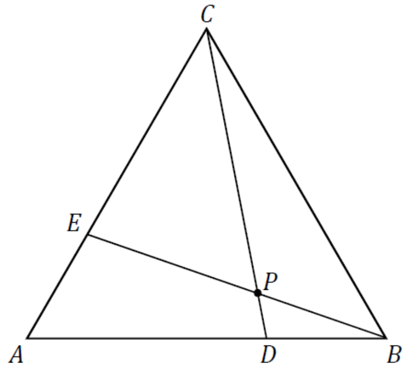
36. (R) Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach równych odpowiednio r, $2r$, $3r$. Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie K, drugi z trzecim w punkcie L i trzeci z pierwszym w punkcie M. **Oblicz** stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC.

37. (R) Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku AC przecina bok AB w punkcie K, a bok BC w punkcie L. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie M, a bok AC w punkcie N (zobacz rysunek). Stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta KBL jest równy $5 : 7$, a stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta AMN jest równy $5 : 8$. Pole czworokąta $DLCN$ jest równe 15.

Oblicz pole trójkąta ABC. **Zapisz** obliczenia.



38. (R) Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na bokach AB i AC wybrano punkty – odpowiednio – D i E takie, że $|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek). **Wykaż**, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

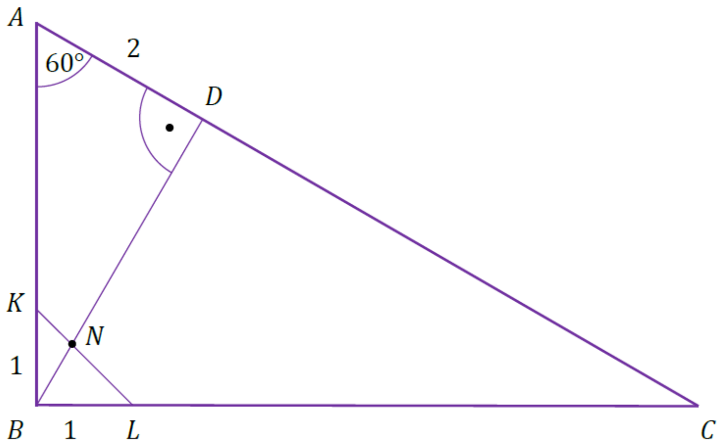


39. (R) W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości x, y.

39. 1. **Wykaż**, że pole trójkąta $P = xy$.

39. 2. **Wykaż**, że pole trójkąta $P = (p - a)(p - b)$, gdzie $p -$ połowa obwodu trójkąta, a, $b -$ długości przyprostokątnych.

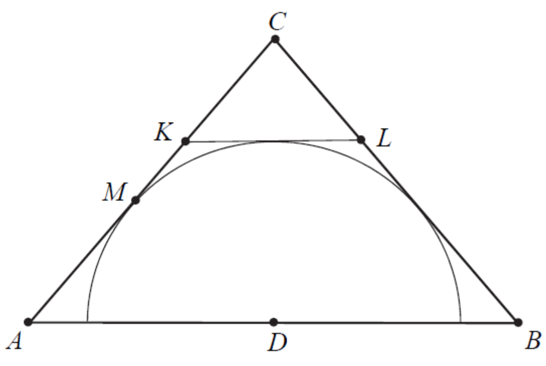
40. (R) Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60°$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N, a ponadto $|AD| = 2$.



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

41. (R) W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|\sphericalangle C| = 90°$, $|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 15°$ i $|AC| = m\sqrt{3}$, $m > 0$, punkt D leży na boku AB tak, ze odcinek CD zawiera się w dwusiecznej kąta C. **Wyznacz** długość odcinka AD.

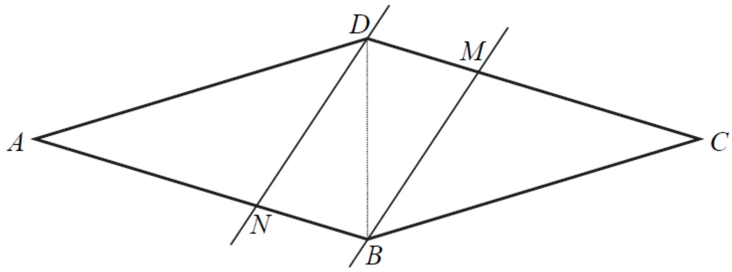
42. (R) Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 6$, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz $|KC| = |LC| = 2$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

43. (R) W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przecinające boki BC, AC i AB tego trójkąta w punktach – odpowiednio – K, L oraz M. Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Na czworokątach $CLPK$ oraz $BKPM$ można opisać okrąg. **Udowodnij**, że trójkąt ABC jest równoboczny.

44. (R) Dany jest romb $ABCD$. Przez wierzchołki B i D poprowadzono dwie proste równoległe przecinające boki CD i AB – odpowiednio – w punktach M i N, tak, że podzieliły one ten romb na trzy figury AND, $NBMD$, BCM o równych polach. Ponadto wiadomo, że $|MB| = |ND| = |BD|$ (zobacz rysunek).

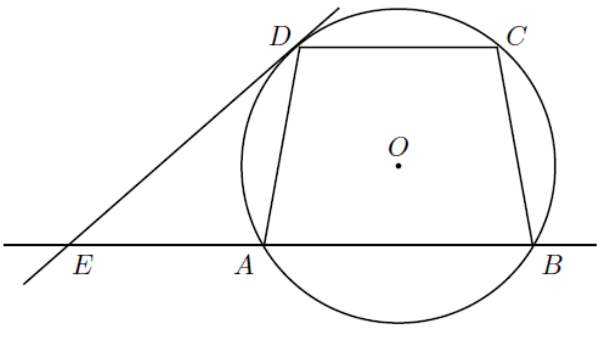


Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.

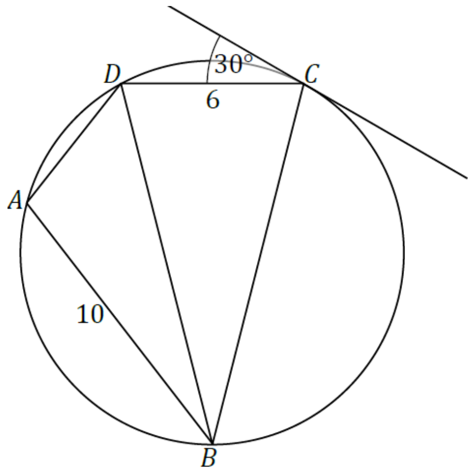
45. (R) W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przez punkt O przecięcia się przekątnych poprowadzono dwie proste równoległe do boków BC i AD. Prosta równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie B', a prosta równoległa do boku AD przecina bok AB w punkcie A'. **Wykaż**, że $|AA'| = |BB'|$.

46. (R) Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy CD jest o 2 mniejsza od długości podstawy AB. Promień okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym CPD jest o 3 mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie APB. **Wykaż**, że spełniony jest warunek $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$.

47. (R) W okrąg wpisano trapez równoramienny, którego podstawy mają długość $|AB| = 8$ cm, $|DC| = 4$ cm. Styczna do okręgu w punkcie D przecina prostą AB w punkcie E (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|DE| = 6\sqrt{5}$ cm **oblicz** promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.



48. (R) W pewien okrąg wpisano czworokąt $ABCD$ taki, że $|AB| = 10$, $|CD| = 6$ oraz $|BC| = |BD|$. Styczna do tego okręgu w punkcie C tworzy z bokiem CD kąt α o mierze $30°$ (zobacz rysunek).

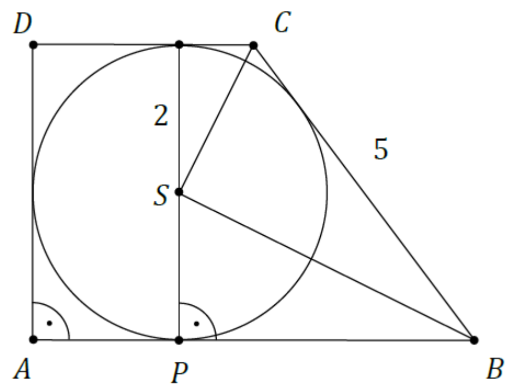


Oblicz pole czworokąta $ABCD$. **Zapisz** obliczenia.

49. (R) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $r = 5\sqrt{2}$. Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10. Kąty wewnętrzne BAD i ADC są ostre, a iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$. **Oblicz** miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.

50. (R) W trapezie $ABCD$ przekątna BD jest dwusieczną kąta CBA i przecina przekątną AC w punkcie K, takim, że $|CK| : |KA| = 1 : 3$. Pole tego trapezu jest równe $100(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\sin\sphericalangle BAD = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $|AD| = 10$ oraz kąt BAD jest ostry. **Oblicz** długości pozostałych boków trapezu $ABCD$. **Zapisz** obliczenia.

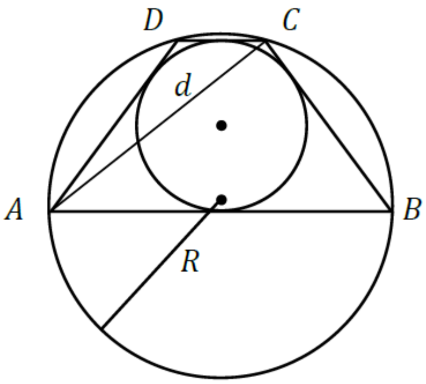
51. (R) Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach A i D. Ramię BC trapezu ma długość 5. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 2. Punkt P jest punktem styczności okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu (zobacz rysunek).



Wykaż, że trójkąty BPS i BSC są trójkątami podobnymi, oraz **oblicz** skalę tego podobieństwa.

52. (R) Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $|AB| > |CD|$ oraz ramię BC ma długość 6. Na tym trapezie opisano okrąg o promieniu $R = 5$. Miary kątów BAC i ABC tego trapezu spełniają warunek $\frac{\sin|\sphericalangle BAC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = \frac{5}{8}$. **Oblicz** pole i obwód trapezu $ABCD$. **Zapisz** obliczenia.

53. (R) Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie l i podstawach AB oraz CD takich, że $|AB| > |CD|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna AC trapezu ma długość d (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$.