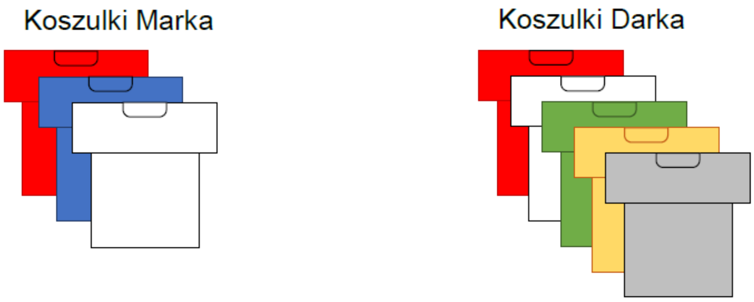
1. Marek ma 3 koszulki w kolorach czerwonym, niebieskim i białym. Darek ma 5 koszulek w kolorach czerwonym, białym, zielonym, żółtym i szarym. Chłopcy umówili się, że następnego dnia każdy



z nich założy wybraną w sposób losowy jedną ze swoich koszulek.

Dokończ zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że następnego dnia chłopcy założą koszulki w tym samym kolorze, jest równe

A. $\frac{2}{15}$ **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{4}{15}$

2. Ze zbioru pięciu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. **Wybierz** **P**, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta, jest równe $\frac{8}{25}$.	**P**	**F**
2.	Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie liczby będą parzyste, jest równe $\frac{2}{25}$.	**P**	**F**

3. Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

4. Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$. Losujemy jednocześnie dwa różne wierzchołki tego pięciokąta. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane wierzchołki będą końcami przekątnej pięciokąta $ABCDE$, jest równe

A. $\frac{3}{10}$ **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{1}{2}$

5. W pojemniku znajdują się losy loterii fantowej ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi od 1000 do 9999. Każdy los, którego numer jest liczbą o sumie cyfr równej 3, jest wygrywający. Uczestnicy loterii losują z pojemnika po jednym losie. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że pierwszy los wyciągnięty z pojemnika był wygrywający. **Zapisz** obliczenia.

6. W pudełku jest 8 kul, z czego 5 białych i 3 czarne. Do pudełka dołożono n kul białych. Doświadczenie polega na losowaniu jednej kuli z tego pudełka. Prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała, jest równe $\frac{11}{12}$. **Oblicz** n.

7. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że co najmniej jeden raz wypadnie ścianka z pięcioma oczkami.

8. Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik **przedstaw** w formie nieskracalnego ułamka.

9. W pewnej grze rzuca się trzema kostkami i oblicza sumę oczek. Krupier twierdzi, że nie ma znaczenia, czy postawimy na sumę oczek równą 10 czy 9, ponieważ każdą z nich można uzyskać na 6 sposobów. $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$, $10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 2 + 5 = 2 + 2 + 6 = 3 + 3 + 4$. Czy krupier ma rację? Odpowiedź **uzasadnij**.

10. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Wynik **zapisz** w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

11. Strzelając do tarczy pewien strzelec uzyskuje co najmniej 9 punktów z prawdopodobieństwem 0,5, a co najwyżej 9 punktów z prawdopodobieństwem 0,7. **Oblicz** prawdopodobieństwo, że ten strzelec uzyska dokładnie 9 punktów.

12. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losowo wybieramy jedna liczbę. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 8 lub liczbę podzielną przez 12.

13. O zdarzeniach losowych A i B wiemy że: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. **Oblicz**:

    a) $P(A \cap B)$,

    b) $P(A \setminus B)$.

14. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry i określamy zdarzenia: $A -$ wyrzucono dwa razy tę samą liczbę oczek, $B -$ suma wyrzuconych oczek jest większa od 7. **Oblicz** prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń.

15. Niech A, B będą zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω. Wiedząc, że $P(A) = 0,62$, $P(B') = 0,8$ i $P(A \cup B) = 0,5$, **oblicz** $P(A \cap B)$ i $P(A \setminus B)$.

16. Wiadomo, że $P(A \cap B') = P(B \cap A')$, $P(A \cup B) = 0,75$, $P(A \cap B) = 0,25$. **Oblicz:**
    a) $P(B)$,
    b) $P(A \setminus B)$.

17. Rzucamy raz symetryczną monetą. Zdarzeniu - wypadł orzeł przypisujemy 2, a zdarzeniu - wypadła reszka przypisujemy liczbę (-1). **Podaj** rozkład zmiennej losowej.

18. W pierwszej grze rzucamy trzema monetami i otrzymujemy $x = 24$ zł. za każdego wyrzuconego orła. W drugiej grze rzucamy czterema monetami i otrzymujemy $y = 15$ zł. za każdego wyrzuconego orła.
    a) Wartość oczekiwana której gry jest większa?
    b) **Oblicz**, ile powinna być równa wygrana x, aby – bez zmiany wartości y w drugiej grze – wartości oczekiwane obu gier były równe?

19. Paweł i Grzegorz postanowili zagrać w grę losową. Ich wspólny kolega będzie kolejno rzucał sześcienną symetryczną kostką do gry, której ścianki są oznaczone od 1 do 6. Gdy na kostce wypadnie liczba oczek mniejsza od 4, to Grzegorz daje Pawłowi 10 żetonów, a gdy na kostce wypadnie liczba oczek równa 6, to Paweł daje Grzegorzowi x żetonów. W pozostałych przypadkach żaden z graczy nie zyskuje ani nie traci żetonów. Paweł i Grzegorz sprawiedliwie ustalili liczbę x żetonów tak, aby wartość oczekiwana zysku z gry Pawła była równa wartości oczekiwanej zysku z gry Grzegorza. **Oblicz** ustaloną przez Pawła i Grzegorza liczbę x żetonów.

Poziom rozszerzony

20. (R) Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczby oczek otrzymanych w wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

21. (R) W pewnym telewizyjnym programie bierze udział trzech sportowców i pewna liczba aktorów. W trakcie tego programu uczestnicy siadają na fotelach w rzędzie, naprzeciw prowadzącego (liczba foteli jest równa liczbie uczestników). Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że cała trójka sportowców będzie siedziała obok siebie przy losowym wyborze miejsc jest równe $\frac{1}{15}$. **Oblicz**, ilu aktorów bierze udział w tym programie.

22. (R) Do szkolnych zawodów szachowych zgłosiło się 16 uczniów, wśród których było dwóch faworytów. Organizatorzy zawodów zamierzają losowo podzielić szachistów na dwie jednakowo liczne grupy eliminacyjne, Niebieską i Żółtą. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że faworyci tych zawodów nie znajdą się w tej samej grupie eliminacyjnej. Końcowy wynik obliczeń **zapisz** w postaci ułamka nieskracalnego.

23. (R) Z szuflady, w której znajduje się 10 różnych par rękawiczek wybieramy losowo cztery rękawiczki. **Opisz** zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie **oblicz** prawdopodobieństwo zdarzeń: A - wśród wylosowanych rękawiczek nie będzie pary, B - wśród wylosowanych rękawiczek będzie dokładnie jedna para.

24. (R) Na dwóch prostych równoległych obrano 9 punktów: na jednej z nich 4 punkty a na drugiej 5 punktów. Ze zbioru tych punktów losujemy jednocześnie trzy punkty. **Oblicz** prawdopodobieństwo, że są one wierzchołkami pewnego trójkąta.

25. (R) a) Drużyna siatkówki składa się z sześciu zawodników. Do kontroli antydopingowej wybiera się dwóch zawodników. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kontroli poddany zostanie kapitan drużyny?
b) Wśród 12 żarówek 4 są wadliwe. Wybrano losowo 3 żarówki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna z nich jest dobra?

26. (R) Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką sześcienną do gry. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia A – na każdej kostce wypadnie nieparzysta liczba oczek.

27. (R) W urnie znajduje się n kul czarnych i $2n$ kul białych ($n \in N$ i $n \geq 2$). Losujemy jednocześnie dwie kule. Dla jakich n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest większe od prawdopodobieństwa wylosowania dwóch kul różnych kolorów?

28. (R) Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ wybieramy losowo jednocześnie cztery liczby. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą będzie 3 lub największą wylosowaną liczbą będzie 7.

29. (R) Dwaj strzelcy trafiają do celu z prawdopodobieństwem 0,8 i 0,7. Strzelcy oddają po jednym strzale. **Oblicz** prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony:
a) dwa razy,
b) dokładnie jeden raz,
c) co najwyżej raz.

30. (R) Z urny wylosowano jednocześnie 4 kule. **Oblicz** prawdopodobieństwo tego, że po ich wylosowaniu stosunek liczby pozostających w urnie kul białych do liczby kul czarnych się zwiększył.

31. (R) Rzucamy czterokrotnie symetryczna sześcienną kostką do gry. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie dwie dwójki lub dokładnie dwie piątki. Wynik **zapisz** w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

32. (R) Ze zbioru $M = \{1;\ 2;\ 3;\ \dots\ ;\ 3n + 1\}$ losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzenie A odpowiada jednoczesnemu wylosowaniu ze zbioru M trzech liczb, takich że suma tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia A.

33. (R) **Oblicz** prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną jedynkę, pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną szóstkę.

34. (R) Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

35. (R) W pudełku znajduje się 30 piłeczek ponumerowanych liczbami 1, 2, 3, 4, …, 30. Losujemy kolejno dwie piłeczki bez zwracania. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia, ze druga wylosowana piłeczka jest oznaczona liczbą pierwszą, jeżeli wiadomo, ze pierwsza piłeczka była oznaczona liczbą nieparzystą. Wynik **podaj** w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

36. (R) Mając dane $P(A) = 0,9$, $P(B|A') = 0,75$ i $P(B|A) = 0,95$ **oblicz** $P(B)$.

37. (R) Niech A, B będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. **Wykaż**, że jeżeli $P(A) = 0{,}85$ i $P(B) = 0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) > 0,8$.

38. (R) Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. **Oblicz** prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek równej 4 pod warunkiem, że bezwzględna wartość różnicy oczek wyrzuconych na poszczególnych kostkach jest równa 2.

39. (R) Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. **Wykaż**, że jeżeli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A|B) \geq 0,625$.

40. (R) Ze zbioru liczb $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. **Sprawdź** niezależność zdarzeń: A – suma wylosowanych liczb jest większa od 8, B – za pierwszym razem wylosujemy liczbę nieparzystą.

41. (R) Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w **Ω**. **Wykaż**, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$. B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B.

42. (R) Wśród uczestników konkursu telefonicznego, w którym nagrodą jest samochód, 24% to osoby w wieku 18–30 lat, 46% to osoby w wieku 31–50 lat, a reszta ma powyżej 50 lat. Prawo jazdy ma w grupie najmłodszych 70% osób, w grupie średniej wiekowo 80%, a w grupie najstarszych uczestników konkursu 60%. Wylosowano osobę, która otrzyma samochód, i w rozmowie telefonicznej okazało się, że ma ona prawo jazdy. **Oblicz** prawdopodobieństwo tego, że zwycięzca konkursu jest w wieku 18–30 lat.

43. (R) Z urny zawierającej 6 kul białych i 4 kule czarne losujemy 2 kule i wkładamy je do drugiej, pustej urny. Następnie z obu urn losujemy po jednej kuli. **Oblicz** prawdopodobieństwo, że będą to dwie kule czarne.

44. (R) Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. **Oblicz** prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

45. (R) Pewna choroba dotyka 0,2% całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę) jest równe 0,99. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe 0,98. Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby. **Oblicz** prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest rzeczywiście chory.

46. (R) Dane są dwie urny z kulami. W pierwszej urnie jest 10 kul: 8 białych i 2 czarne, w drugiej jest 8 kul: 5 białych i 3 czarne. Wylosowano jedną z tych urn i wyciągnięto z niej jedną kulę. Wyciągnięta kula była czarna. **Oblicz** prawdopodobieństwo, że wylosowana kula pochodziła z pierwszej urny.

47. (R) Statystycznie wśród 10 000 mężczyzn jest 500 daltonistów, a wśród 10 000 kobiet jest 50 daltonistek. Z grupy 100 mężczyzn i 400 kobiet wybieramy losowo jedną osobę. **Oblicz** prawdopodobieństwo tego, że wybrana osoba jest kobietą, jeśli ma problemy z rozpoznawaniem kolorów.

48. (R) Maszyna napełnia torebki herbatą. Każda torebka ma zostać napełniona 200 g herbaty. Torebkę, która zawiera mniej niż 200 g herbaty, nazywamy torebką z niedowagą. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza torebka napełniona przez tę maszynę jest z niedowagą, jest równe 0,1. Kontroli poddano masę herbaty w torebkach napełnianych przez tę maszynę danego dnia. Do kontroli wybrano losowo 20 torebek. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród tych 20 losowo wybranych torebek znajdą się co najwyżej dwie torebki z niedowagą. **Zapisz** obliczenia. Wynik **zapisz** w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

49. (R) Egzamin składa się z 15 zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej 11 zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź. **Przyjmij**, że w każdym zadaniu wybór każdej

z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny. **Oblicz** prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin. **Zapisz** obliczenia.

50. (R) Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że 60% rozegranych partii wygrywa jego syn. **Oblicz**, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od $0,95$.

51. (R) Badając tzw. siłę kiełkowania nasion wysiewa się ich pewną liczbę i oblicza, jaki procent ziaren wykiełkował. Przeprowadzono badania siły kiełkowania pewnego rodzaju nasion. Wyniki tych badań zamieszczono w tabeli.

Liczba wysianych nasion	100	100	150	200	200	250
Liczba nasion, które wykiełkowały	60	66	92	110	106	166

Oblicz na podstawie tabeli siłę kiełkowania tych nasion. Następnie **oblicz**, ile najmniej tego typu nasion trzeba wysiać, aby z prawdopodobieństwem większym od 0,99 można było stwierdzić, że przynajmniej jedno z nich wykiełkuje.