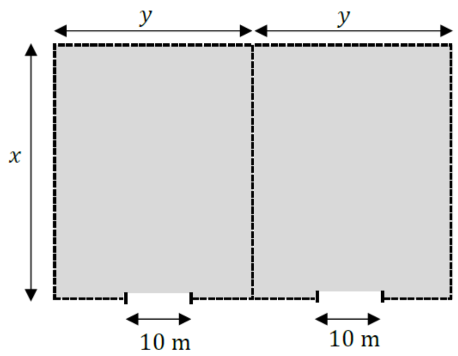
1. Firma handlowa ustaliła, że liczba sprzedanych przez nią egzemplarzy gry komputerowej w ciągu każdego tygodnia zależy od jej ceny. Liczbę sprzedanych egzemplarzy opisuje funkcja $f(x) = 2400 - 15x$, gdzie x oznacza cenę jednostkową gry. Jaka powinna być cena jednostkowa, aby tygodniowy przychód P ze sprzedaży gry był największy? **Oblicz** ten największy przychód. **Zapisz** obliczenia.

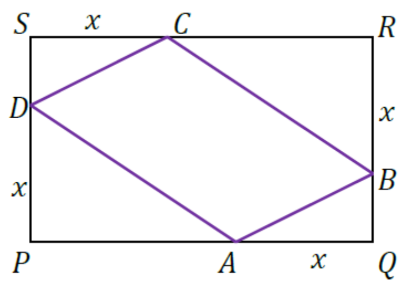
   Wskazówka: przyjmij, że przychód jest iloczynem liczby sprzedanych gier oraz ceny jednostkowej tej gry.

2. Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



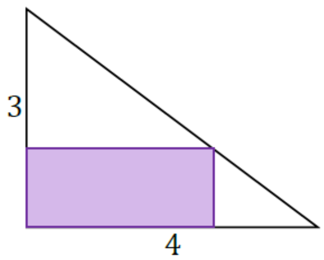
   Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

3. Dany jest prostokąt $PQRS$ o bokach długości $|PQ| = |SR| = 10$ oraz $|PS| = |QR| = 6$. Na bokach PQ, QR, RS, SP obrano odpowiednio punkty A, B, C, D takie, że $|AQ| = |BR| = |CS| = |DP| = x$ oraz $x \geq 3$ (zobacz rysunek).



   Wyznacz długość odcinka x, dla którego pole czworokąta $ABCD$ jest najmniejsze. **Wyznacz** to pole. **Zapisz** obliczenia.

4. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 i 4. Wpisano w niego prostokąt w taki sposób, że dwa z jego boków zawierają się w przyprostokątnych trójkąta, a jeden wierzchołek leży na przeciwprostokątnej (zobacz rysunek). Jakie wymiary powinien mieć prostokąt, aby jego pole było największe? **Oblicz** to największe pole. **Zapisz** obliczenia.



Poziom rozszerzony

5. (R) **Oblicz** granicę funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{3x^2-4x-4}$ w punkcie $x_0 = 2$,

b) $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$ w punktach $x_0 = 2$, $x_0 = -2$ oraz przy $x \to \infty$,

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{6-2x}$ w punkcie $x_0 = 3$,

d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ przy $x \to \infty$,

e) $f(x) = \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ w punkcie $x_0 = 1$,

f) $f(x) = \frac{64-x^3}{x-4}$ w punkcie $x_0 = 4$,

g) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ przy $x \to -\infty$,

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ przy $x \to \infty$,

i) $f(x) = \frac{\sin 3x}{4x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

6. (R) **Wyznacz** równania asymptot funkcji:

a) $f(x) = \frac{3x-6}{2x+2}$,

b) $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{1-x}$.

7. (R) **Udowodnij**, że pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in R \setminus \{0\}$ określona jest wzorem $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

8. (R) Dla jakiej wartości parametru k zachodzi równość:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-(k+1)x+k}{x^2-1} = 5.$$

9. (R) **Naszkicuj** wykres pewnej funkcji f, która spełnia następujące warunki:

a) dziedziną jest zbiór $R \setminus \{-3, 1\}$,

b) jest ciągła w swojej dziedzinie,

c) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -3} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to \infty} f(x) = -4$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

10. (R) a) **Zbadaj** ciągłość funkcji: $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2+3x+2}{x-2} & \text{gdy } x \neq 2 \\ -5 & \text{gdy } x = 2 \end{cases}$.

(R) b) Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{gdy } x \leq -1 \\ ax^2 + c & \text{gdy } -1 < x \leq 2 \\ 3x - 2 & \text{gdy } x > 2. \end{cases}$$

Wyznacz wszystkie wartości parametrów a i c tak, aby funkcja f była ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

11. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x-3}{x+2} + 4\log_{\frac{1}{2}} x$ dla wszystkich $x > 0$. **Wykaż**, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

12. (R) **Wykaż**, że równanie $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$ ma w przedziale $(-2; 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

13. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + 1$ dla każdego $x \in R$. **Wykaż**, że liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

14. (R) **Wyznacz** pochodną funkcji:
    a) $f(x) = -3x^2 + x$ dla $x_0 = 0$,
    b) $f(x) = (x-2)^2(1-x^2)$,
    c) $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{3x-x^2}$,
    d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$,
    e) $f(x) = \sqrt{7x^2 + x}$.

15. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Punkt $P = (x_0, 3)$ należy do wykresu funkcji f. **Oblicz** x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. **Zapisz** obliczenia.

16. (R) a) **Wyznacz** kąt, który styczna do wykresu funkcji w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{1}{2}$ tworzy z dodatnia półosią osi OX, gdy $f(x) = 2\sqrt{3}x^4$.

    (R) b) Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem $30°$. **Oblicz** współrzędne punktu P.

17. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \sqrt{1+4x}$ dla $x \in [-\frac{1}{4}; +\infty)$. **Napisz** równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = 2$. **Zapisz** obliczenia.

18. (R) a) Punkt $P = (10, 2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P. **Oblicz** współczynnik b.

    (R) b) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^3+k}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. **Oblicz** wartość k, dla której prosta o równaniu $y = -x$ jest styczna do wykresu funkcji f.

19. (R) Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. **Wyznacz** równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

20. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ dla każdego $x \in (-1;\ +\infty)$. **Wykaż**, że funkcja f jest funkcją rosnącą.

21. (R) **Wyznacz** parametry $a,\ b$ wiedząc, że funkcja $y = x^2 + ax + b$ w punkcie $x = 3$ osiąga ekstremum równe 1.

22. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 + 0{,}5(2x+1)^4$ dla każdego $x \in R$. **Oblicz** najmniejszą wartość tej funkcji.

23. (R) **Zbadaj** monotoniczność i ekstrema funkcji $f(x) = 6x^2 - x^3$.

24. (R) **Wyznacz** przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.

25. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\ \in\ [-1, 3]$. **Wyznacz** zbiór wartości funkcji f.

26. (R) Funkcja f jednej zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem $f(x) = x^2 - mx$.
    a) Dla jakich wartości m, funkcja f jest malejąca w przedziale $(-1; 1)$?
    b) Dla $m = 3$ **wyznacz** najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $[1; 4]$.

27. (R) Dla jakiej wartości parametru k funkcja $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$ osiąga ekstremum w punkcie $x_0 = 1$? **Wyznacz** drugie ekstremum i **określ** rodzaj tego ekstremum.

28. (R) Firma X wytwarza pewien produkt D. Badania rynku pokazały, że związek między ilością Q produktu D, jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną P produktu jest następujący:

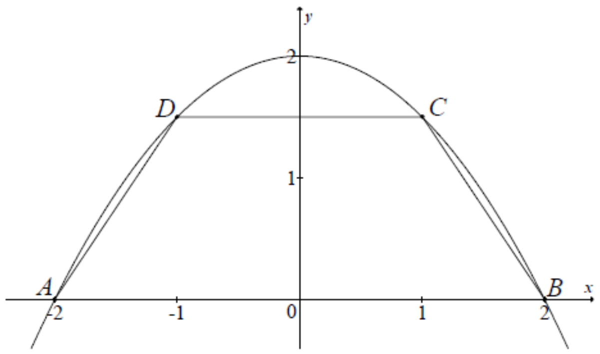
$$P(Q) = 90 - 0{,}1Q \text{ dla } Q \in [0, 900]$$

gdzie P jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a Q – ilością produktu w tys. sztuk. Koszty K wytworzenia produktu D zależą od ilości Q wytwarzanego produktu następująco:

$$K(Q) = 0{,}002Q^3 + Q^2 + 29{,}9985Q + 50$$

gdzie K jest kosztem produkcji w tys. zł. **Oblicz**, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik **podaj** zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk.

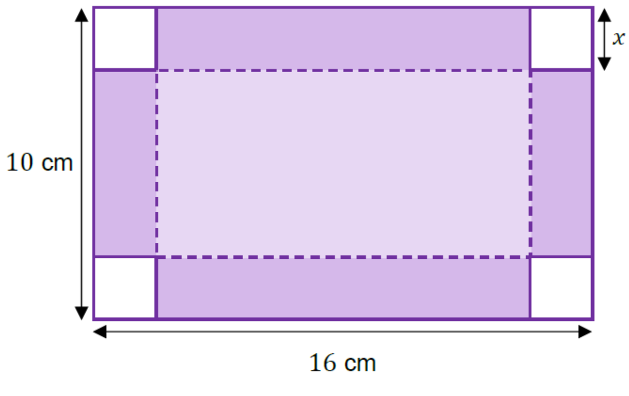
29. (R) Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-2, 0\,)$ i $B = (2, 0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB, a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek)



Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C. **Oblicz** współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

30. (R) Trójkąt ABC, w którym $|AC| = |BC|$, jest wpisany w okrąg o promieniu R. Środek tego okręgu leży wewnątrz trójkąta ABC. Niech x oznacza odległość środka okręgu od podstawy AB. **Wykaż**, że pole trójkąta ABC jako funkcja zmiennej x jest określone wzorem $P(x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$. **Określ** dziedzinę tej funkcji.

31. (R) Grażyna planuje zrobienie pudełka (bez wieczka) w kształcie prostopadłościanu. W tym celu zamierza wykorzystać prostokątny kawałek tektury o wymiarach 10 cm × 16 cm, odcinając z każdego rogu kwadrat o boku x cm (zobacz rysunek).

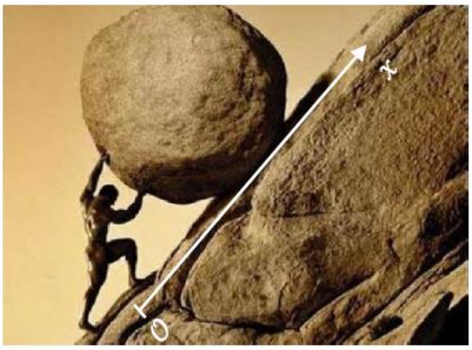


Oblicz wartość x, dla której objętość otrzymanego pudełka będzie największa. **Oblicz** tę największą objętość pudełka. **Zapisz** obliczenia.

32. (R) Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o 4 km, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem

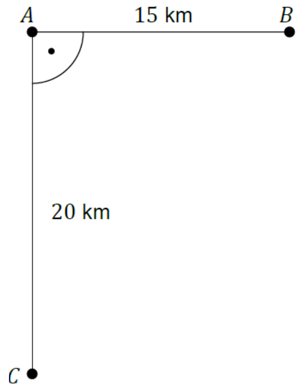
$$x(t) = -t^3 + 16{,}5t^2 + 180t \text{ dla } t \in [0, 24]$$

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t – w godzinach.

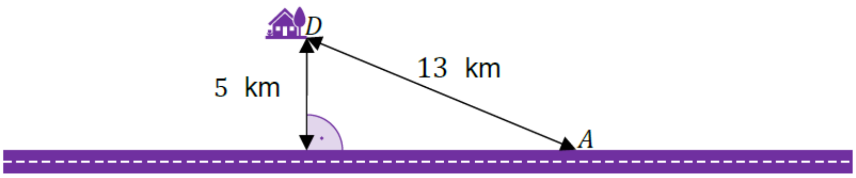


Oś Ox jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry. **Oblicz** najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliżył się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

33. (R) Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości A, B i C oraz zaznaczono odległości między nimi. O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp harcerzy „Tropiciele” i przemieszczał się z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze” i przemieszczał się z prędkością 2 km/h. **Wyznacz** godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.



34. (R) Dom D stoi w odległości 5 km od prostoliniowego odcinka drogi. W chwili początkowej Janusz znajduje się na tej drodze w punkcie A oddalonym od domu D o 13 km (zobacz rysunek). Janusz może iść drogą z maksymalną prędkością 5 km/h, zaś poza nią może poruszać się z maksymalną prędkością 3 km/h.

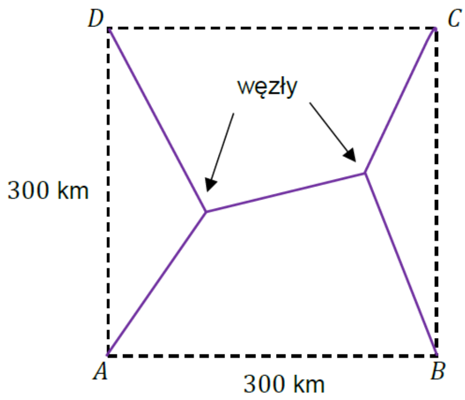


Oblicz najkrótszy czas potrzebny Januszowi na dojście do domu $\boldsymbol{D}$. Zapisz obliczenia.

35. (R) Ciężarówka ma do pokonania trasę długości S km, poruszając się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 40 km/h, maksymalna – 80 km/h. Wiemy, że litr paliwa kosztuje 8 złotych, a kierowca otrzymuje 42 złote za godzinę swej pracy. Zużycie paliwa w ciągu jednej godziny jazdy autostradą w zależności od prędkości v wyrażone w litrach można opisać funkcją $f(v) = 7 + \frac{v^2}{400}$. **Oblicz**, przy jakiej prędkości koszt przejazdu będzie najmniejszy. **Zapisz** obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że koszt przejazdu jest sumą kosztu paliwa oraz wynagrodzenia kierowcy.

36. (R) Cztery miasta A, B, C, D znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku 300 km. Pewna firma dostała zlecenie na zaprojektowanie sieci dróg, która będzie łączyć każde dwa z tych miast. Sieć ma posiadać dwa węzły, a łączna długość dróg w sieci ma być możliwie najmniejsza. (Przykład sieci dróg



z dwoma węzłami, łączącej każde dwa z miast, przedstawiono na poniższym rysunku).
Oblicz, jaka musi być długość najkrótszej takiej sieci dróg i gdzie muszą być zlokalizowane węzły tej sieci.

37. (R) Rozpatrujemy wszystkie takie prostopadłościany, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 80, pole powierzchni całkowitej jest równe 256 i żadna z krawędzi bryły nie jest krótsza niż 4.

37. 1. **Wykaż**, że układ równań

$$4a + 4b + 4c = 80 \qquad (1)$$
$$2ab + 2bc + 2ca = 256 \qquad (2)$$

z niewiadomymi a oraz b ma rozwiązanie, które jest parą liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4 wtedy i tylko wtedy, gdy $c \in [4, \frac{28}{3}]$.

37. 2. Objętość każdego z rozpatrywanych prostopadłościanów można wyrazić za pomocą funkcji

$$V(c) = c^3 - 20c^2 + 128c \text{ gdzie } c \in \left[4; \frac{28}{3}\right]$$

jest długością jednej z krawędzi bryły. Spośród rozpatrywanych prostopadłościanów **oblicz** objętość tego prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza.

38. (R) Dany jest okrąg o promieniu R. Rozważamy wszystkie trójkąty spełniające warunki:
- są wpisane w ten okrąg,
- mają obwody równe $3R$,
- mają jeden z boków dwukrotnie dłuższy od drugiego.

Znajdź trójkąt o możliwie największym polu przy zadanych warunkach. **Oblicz** jego pole. **Zapisz** obliczenia.

39. (R) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaka powinna być długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, aby jego objętość była największa?

40. (R) Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. **Wyznacz** promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. **Oblicz** tą objętość.