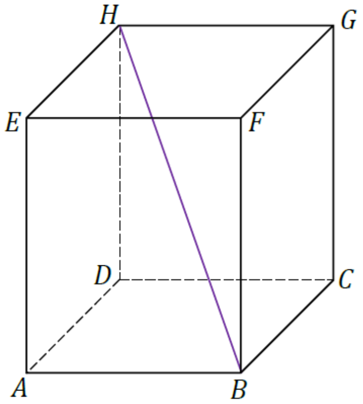
16. Stereometria

mgr Magdalena Kucharska, mgr Anna Piłat

1. **Oblicz** sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.

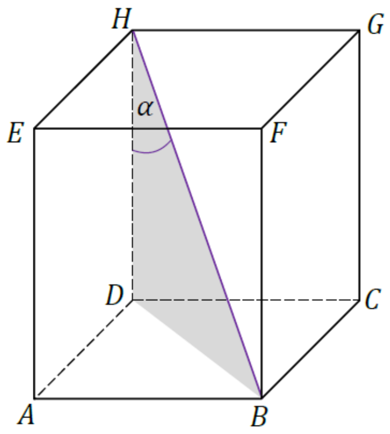
2. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego postawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.



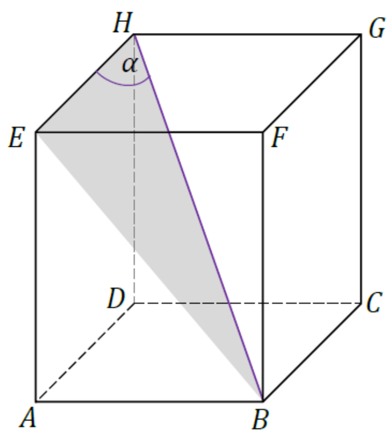
2.1. Na którym rysunku prawidłowo narysowano, oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną $ADHE$?

Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

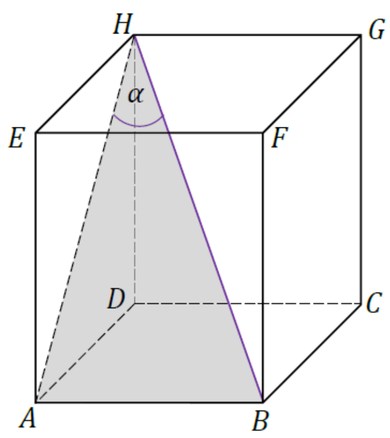
A. $\alpha = \measuredangle BHD$



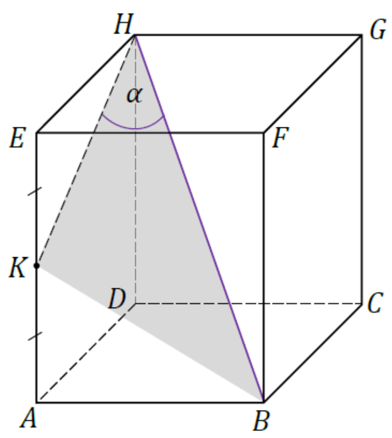
B. $\alpha = \measuredangle BHE$



C. $\alpha = \measuredangle BHA$



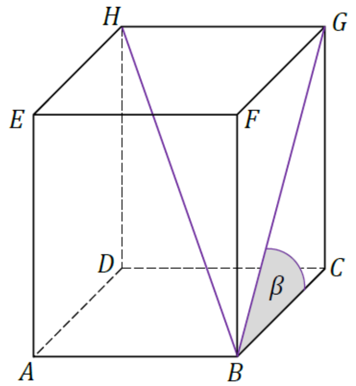
D. $\alpha = \measuredangle BHK$



2.2. W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{9}{7}, \qquad |BG| = 2\sqrt{130}, \qquad |BH| = 2\sqrt{194}$$

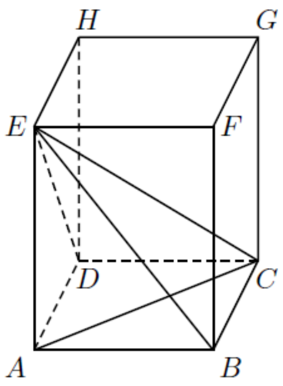
gdzie odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$, β jest miarą kąta $\sphericalangle GBC$. Sytuację ilustruje rysunek poniżej.



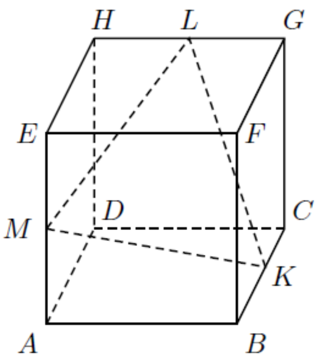
Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

3. **Oblicz** długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a przekątna ta tworzy:
   a) z przekątną podstawy kąt $45°$,
   b) z jedną z krawędzi bocznych kąt $30°$,
   c) z przekątną jednej ze ścian bocznych kąt $30°$.

4. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4, a miara kąta $|\sphericalangle ACE| = 60°$. **Oblicz** objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na rysunku.



5. Punkty K, L i M są środkami krawędzi BC, GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek).

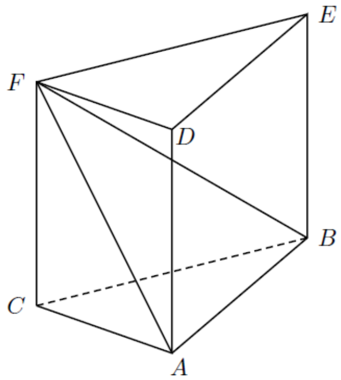


Oblicz pole trójkąta KLM.

6. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 8 cm i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma wspólny wierzchołek kąt, którego cosinus jest równy $\frac{2}{3}$. **Oblicz** objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

7. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy z krawędzią podstawy kąt α. **Uzasadnij**, że pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe $4d^2 \cos\alpha \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

7. A) Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 8, a pole trójkąta



ABF jest równe 52.

Oblicz objętość tego graniastosłupa.

8. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o podstawach ABC i $A'B'C\,'$ oraz krawędziach bocznych AA', BB', CC'. Kąt między przekątną ściany bocznej AC' a krawędzią podstawy AC ma miarę α. Promień okręgu wpisanego w podstawę graniastosłupa ma długość r. **Oblicz** pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

9. **Oblicz** pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa wiedząc, że ma on 18 krawędzi i każda z nich jest równa 4 cm.

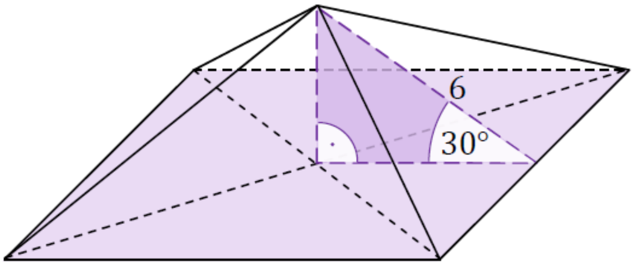
10. Dane są dwa prostopadłościany podobne: $\mathcal{B}_1$ oraz $\mathcal{B}_2$. Objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równa V, a objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równe P.

Dokończ zdanie. **Zaznacz** odpowiedź **A**, **B** albo **C** oraz jej uzasadnienie **1.**, **2.** albo **3.**

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równe

A.	$27P$,	ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy	**1.**	stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.
B.	$9P$,		**2.**	pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.
C.	$3\sqrt{3}P$,		**3.**	kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

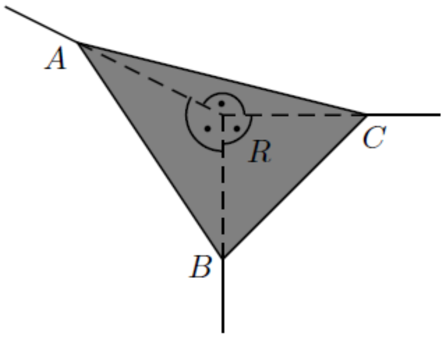
11. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° i ma długość równą 6 (zobacz rysunek).



Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. **Zapisz** obliczenia.

12. Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 17 cm. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 18 cm i 24 cm. **Oblicz** objętość tego ostrosłupa.

13. Narożnik między dwiema ścianami i sufitem prostopadłościennego pokoju należy zamaskować trójkątnym fragmentem płyty gipsowo kartonowej (zobacz rysunek).



Wiedząc, że $|RA| = |RB| = |RC| = 1$ m, **oblicz** objętość narożnika zamaskowanego tą płytą. Wynik **zaokrąglij** do 0,01 m^3 .

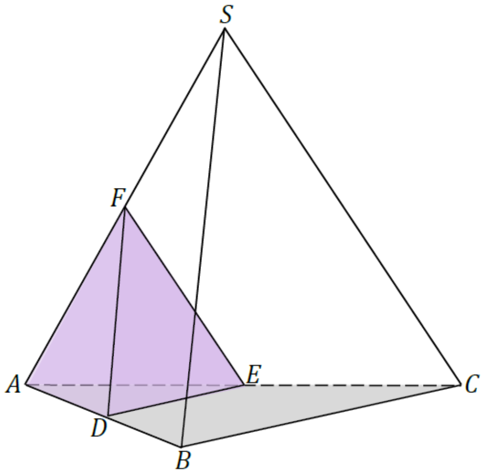
14. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej ma długość $4\sqrt{3}$, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod katem $60°$. **Oblicz** objętość ostrosłupa.

15. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość a. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. **Oblicz** cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

15. A) Każda z krawędzi podstawy trójkątnej ostrosłupa ma długość $10\sqrt{3}$, a każda jego krawędź boczna ma długość 15. **Oblicz** wysokość tego ostrosłupa. **Zapisz** obliczenia.

16. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC. Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa. **Oblicz** objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.

17. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ zaznaczono środki krawędzi AB, AC i AS odpowiednio punktami D, E, F (zobacz rysunek).

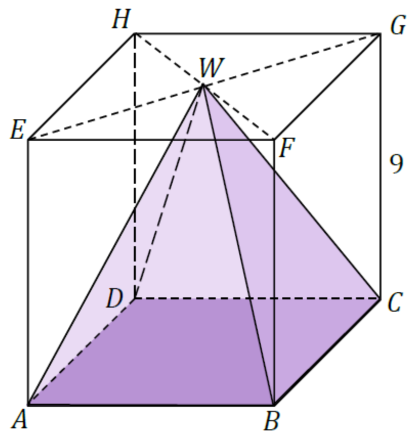


Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Pole powierzchni ostrosłupa $ADEF$ jest dwukrotnie mniejsze od pola powierzchni ostrosłupa $ABCS$.	**P**	**F**
2.	Objętość ostrosłupa $ADEF$ jest ośmiokrotnie mniejsza od objętości ostrosłupa $ABCS$.	**P**	**F**

18. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 9. Wierzchołki podstawy $ABCD$ sześcianu połączono odcinkami z punktem W, który jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $EFGH$. Otrzymano w ten sposób ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDW$ (zobacz rysunek).



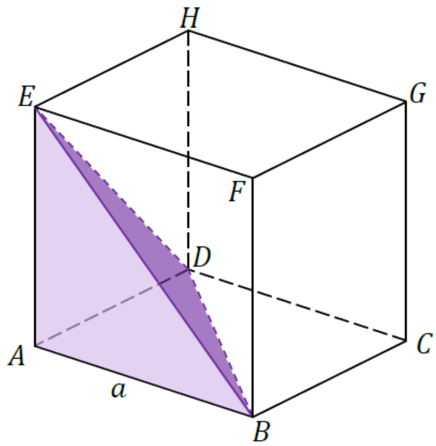
18.1. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość V ostrosłupa $ABCDW$ jest równa

A. 243 **B.** 364,5 **C.** 489 **D.** 729

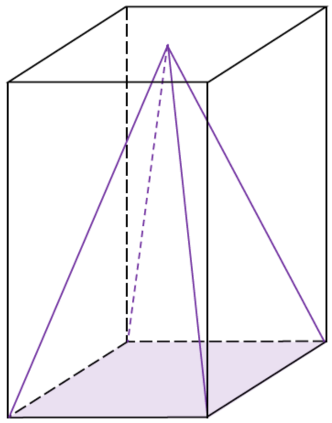
18.2. **Oblicz** cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy. **Zapisz** obliczenia.

18. A) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Punkty A, B, D i E są wierzchołkami ostrosłupa (zobacz rysunek). **Oblicz** pole powierzchni ostrosłupa $ABDE$. **Zapisz** obliczenia.



19. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H = 16$. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy $\frac{3}{5}$. **Oblicz** pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

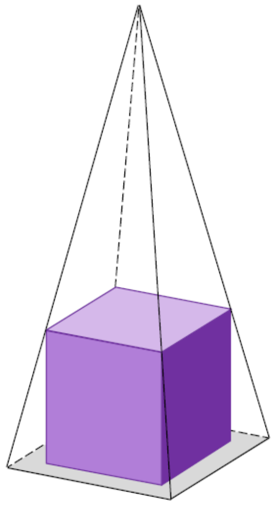
19. A) Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, o krawędzi podstawy a oraz wysokości h. Wpisano w niego ostrosłup prawidłowy czworokątny w taki sposób, że krawędzie podstawy ostrosłupa i graniastosłupa pokrywają się, zaś górny wierzchołek ostrosłupa jest środkiem podstawy górnej graniastosłupa (zobacz rysunek). Niech F będzie bryłą powstałą po wycięciu ostrosłupa z graniastosłupa.



Dokończ zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.
Różnica objętości bryły F i objętości ostrosłupa jest równa

A. $\frac{1}{3}a^2h$ **B.** $\frac{2}{3}a^2h$ **C.** $\frac{1}{3}ah^2$ **D.** $\frac{2}{3}ah^2$

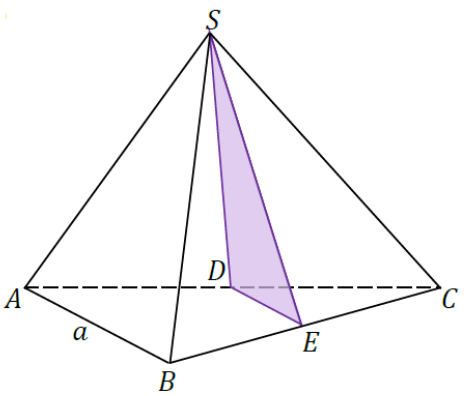
20. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 2 i wysokości 8. Wpisano w niego sześcian w taki sposób, że dolna podstawa sześcianu zawiera się w podstawie ostrosłupa, a krawędzie jego górnej podstawy zawierają się w ścianach bocznych ostrosłupa (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.
Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Krawędź sześcianu jest dłuższa niż 1,5.	**P**	**F**
2.	Ostrosłup jest czterokrotnie wyższy od sześcianu.	**P**	**F**
3.	Objętość sześcianu jest większa od 4.	**P**	**F**

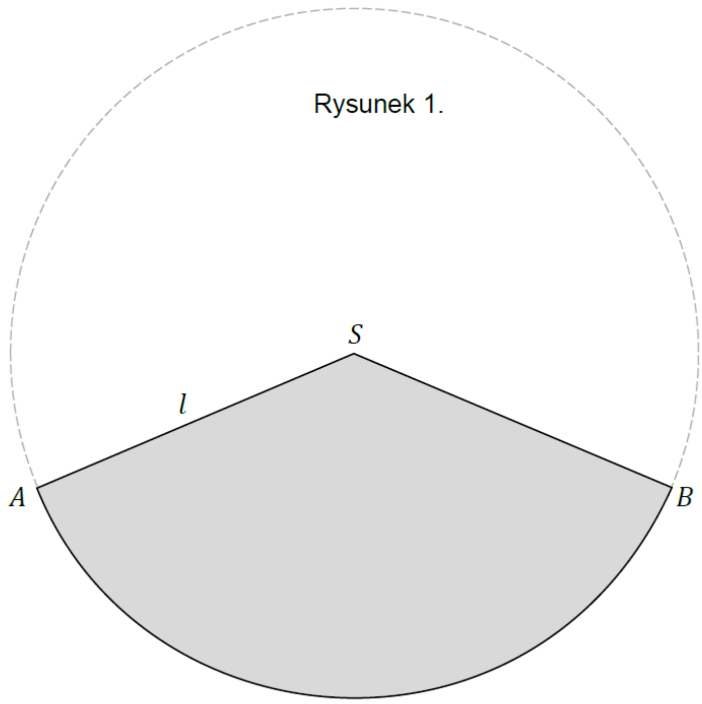
21. Każda krawędź czworościanu $ABCS$ ma długość a. Punkty D i E są środkami boków – odpowiednio – AC oraz BC (zobacz rysunek).
Oblicz pole trójkąta DES. **Zapisz** obliczenia.

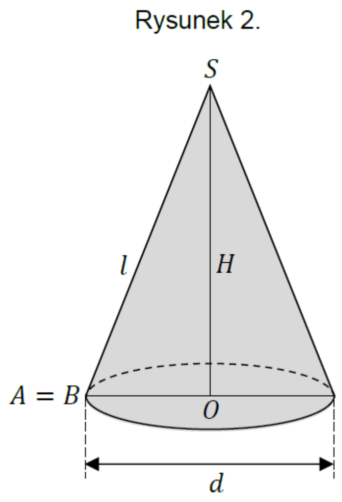


22. Tworząca stożka ma długość 17, a wysokość stożka jest krótsza od średnicy jego podstawy o 22 **Oblicz** pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.

23. Dany jest stożek o objętości 8π, w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy $3 : 8$. **Oblicz** pole powierzchni bocznej tego stożka.

24. Hania zaprojektowała i wykonała czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka miała kształt powierzchni bocznej stożka o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l. Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie wycinka koła o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowiednio ją wymodelowała i skleiła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.). Do obliczeń **przyjmij**, że rzeczywiste figury są idealne.





24.1. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka, ma miarę (w zaokrągleniu do 1°)

A. 44° **B.** 136° **C.** 22° **D.** 68°

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

24.2. **Oblicz** miarę kąta $\measuredangle BSA$ wycinka koła, z którego powstała powierzchnia boczna stożka opisanego we wstępie do zadania. Miarę kąta $\measuredangle BSA$ **podaj** w zaokrągleniu do jednego stopnia.

25. Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° , przetopiono na 6 jednakowych kulek. **Oblicz** promień kulki.

26. Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. **Oblicz** objętość kapsuły lądownika.

27. Metalową kulę o promieniu 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość wynoszą odpowiednio 16 cm i 12 cm przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. **Oblicz** wysokość walca.

28. Metalową kulę o promieniu $R = 5$ cm w całości przetopiono na kuleczki o promieniu $r = 0{,}25$ cm. Ile uzyskano w ten sposób kuleczek?

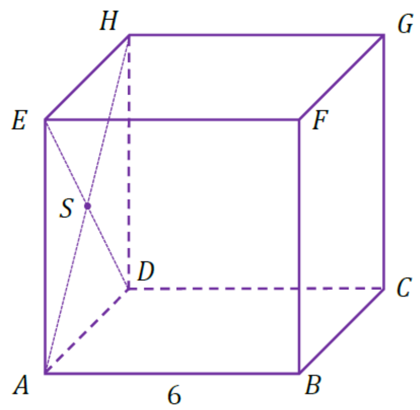
28. A) a) Dane są dwie kule. Objętość pierwszej kuli jest równa 36π cm^3 , a druga kula ma promień dwa razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. **Podaj** objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?

b) Po dopompowaniu powierzchnia kulistego balonu zwiększyła się o 44%. O ile wzrosła objętość balonu?

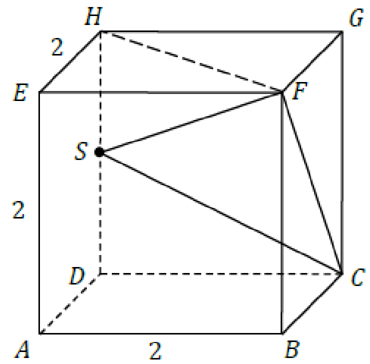
29. Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. **Oblicz** długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Poziom rozszerzony

30. (R) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek). **Oblicz** wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. **Zapisz** obliczenia.

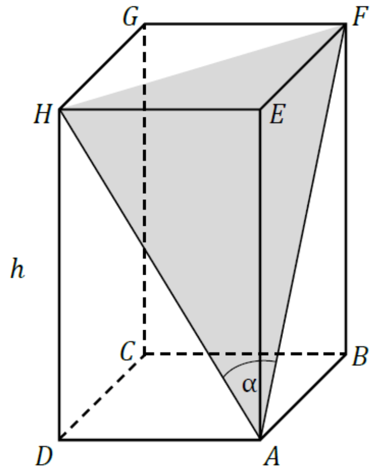


31. (R) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 2. Punkt S jest środkiem krawędzi DH (zobacz rysunek). **Oblicz** miarę najmniejszego kąta wewnętrznego trójkąta CFS.



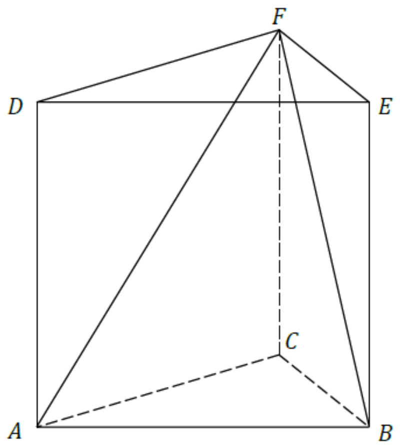
31. A) (R) Przekątne sąsiednich ścian bocznych prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka tworzą z podstawą kąty o miarach $\frac{\pi}{3}$ i α. Cosinus kąta między tymi przekątnymi jest równy $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **Wyznacz** miarę kąta α.

32. (R) Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe 26,4.

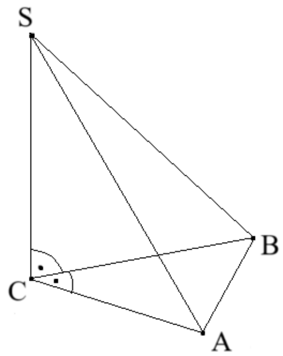


Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.

32. A) (R) Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 4, a wysokość graniastosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek). **Oblicz** sinus kąta AFB.



32. B) (R) Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny ABC o długościach przyprostokątnych $|AC| = 15$ i $|BC| = 20$. Krawędź CS ostrosłupa jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i ma długość 16 (zobacz rysunek).



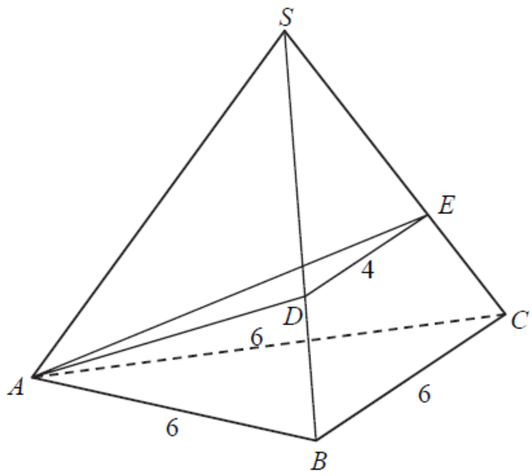
Oblicz długość wysokości trójkąta ABS poprowadzonej do boku AB.

33. (R) Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest trapez $ABCD$ $(AB||CD)$. Ramiona tego trapezu maja długość $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa $30°$. Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α, taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{2}$. **Oblicz** objętość tego ostrosłupa.

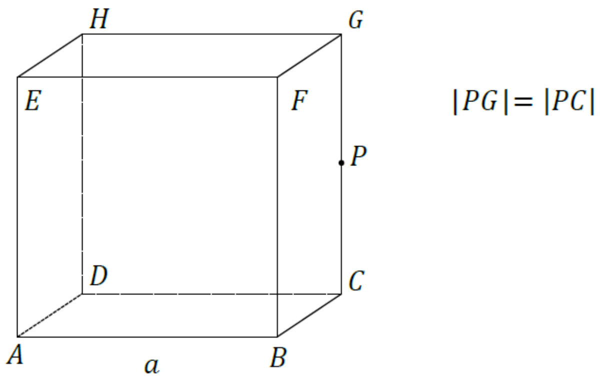
34. (R) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym P. Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka S ma miarę 2α. Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym. **Oblicz** współczynnik k. **Zapisz** obliczenia.

35. (R) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. **Wykaż**, że tangens kąta dwuściennego między ścianą boczną i podstawą jest równy $2\operatorname{tg}\alpha$.

35. A) (R) Podstawą ostrosłupa prawidłowego *ABCS* jest trójkąt równoboczny *ABC* o boku długości 6. Na krawędziach bocznych *BS* i *CS* wybrano punkty, odpowiednio D i E, takie że $|BD| = |CE|$ oraz $|DE| = 4$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej *BCS* ostrosłupa.
Oblicz objętość tego ostrosłupa.



35. B) (R) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu (zobacz rysunek poniżej).



Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P.

36. (R) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy 1: 5. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę. **Oblicz** stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do 1°).

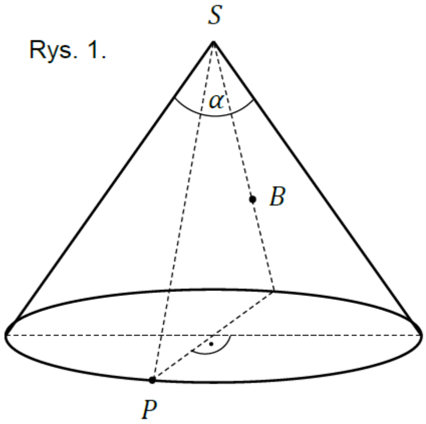
36. A) (R) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość a. Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α takim, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Przez krawędź BC podstawy ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę π prostopadłą do ściany bocznej SAD. **Sporządź** rysunek tego ostrosłupa, **zaznacz** na rysunku przekrój wyznaczony przez płaszczyznę π i **nazwij** figurę, która jest tym przekrojem. **Oblicz** pole otrzymanego przekroju. **Zapisz** obliczenia.

36. B) (R) W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. **Oblicz** odległość środka S kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP, gdzie P jest punktem płaszczyzny π.

37. (R) Tomek i Marek chcą wejść docelowo na szczyt S pewnej góry. W chwili początkowej znajdują się w punkcie P położonym na stoku góry dokładnie na północ od szczytu na wysokości H_0 metrów n.p.m.

Tomek i Marek chcą dotrzeć do bazy B znajdującej się dokładnie na południe od szczytu na przeciwległym południowym stoku góry na wysokości H_1 metrów n.p.m., a następnie z bazy wejść na szczyt leżący na wysokości H_2 metrów n.p.m. (patrz rysunek 1.).

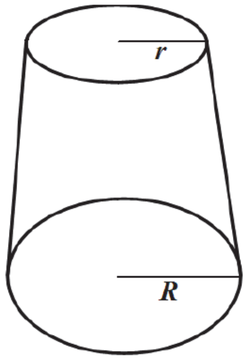
Rys. 1.



Oblicz długość najkrótszej drogi, jaką muszą pokonać, aby dotrzeć do bazy. **Przyjmij**, że góra jest stożkiem o kącie rozwarcia α.

Wskazówka: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła. Najkrótsza droga do bazy odpowiada najkrótszej drodze z punktu P do B na wycinku koła.

37. A) (R) Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$, gdzie r i R są promieniami podstaw $(r < R)$, a H jest wysokością bryły.
Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π, a $r = 6$. **Oblicz** cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.

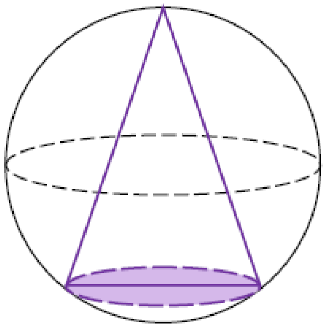


37. B) (R) Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. **Oblicz** wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. **Oblicz** tę największą objętość.

38. (R) Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. **Oblicz** wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

39. (R) Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 16 cm obraca się dookoła podstawy. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość otrzymanej bryły będzie maksymalna?

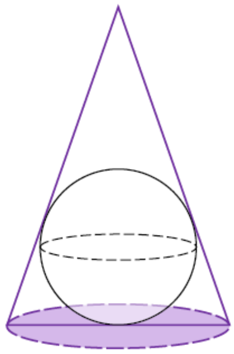
40. (R) Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki zawierające środek kuli i wpisane w tę kulę, to znaczy takie, w których:
• wierzchołek leży na powierzchni kuli,



• okrąg, będący krawędzią podstawy stożka, leży na powierzchni kuli (zobacz rysunek).
Oblicz promień podstawy tego stożka, który ma największą objętość. **Oblicz** objętość tego stożka. **Zapisz** obliczenia.

41. (R) Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki opisane na tej kuli, to znaczy takie, których:

- podstawa ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą
- każda tworząca ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą (zobacz rysunek).



41. 1. **Wykaż**, że objętość V stożka o wysokości h wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}.$$

41. 2. **Oblicz** wysokość tego stożka, który ma najmniejszą objętość. **Oblicz** objętość tego stożka. **Zapisz** obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z informacji, że objętość stożka o wysokości h wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}.$$