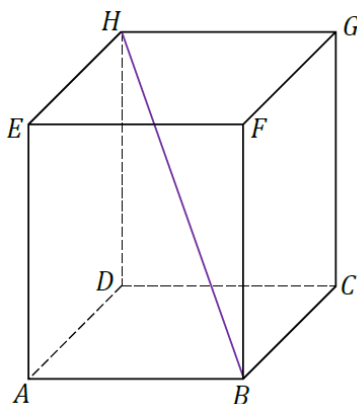


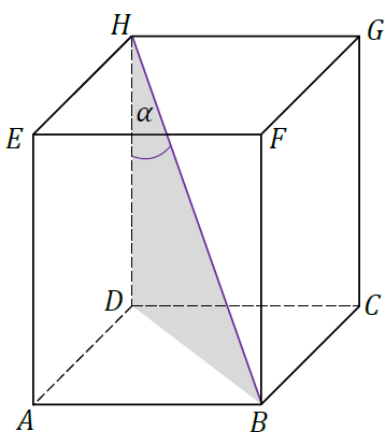
1. **Oblicz** sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.
2. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego postawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.



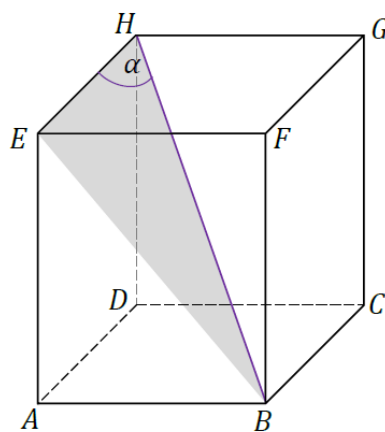
2.1. Na którym rysunku prawidłowo narysowano, oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną $ADHE$?

Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

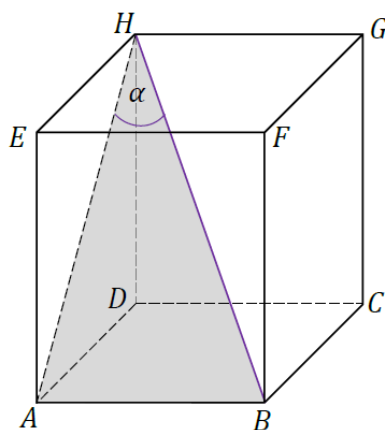
A. $\alpha = \sphericalangle BHD$



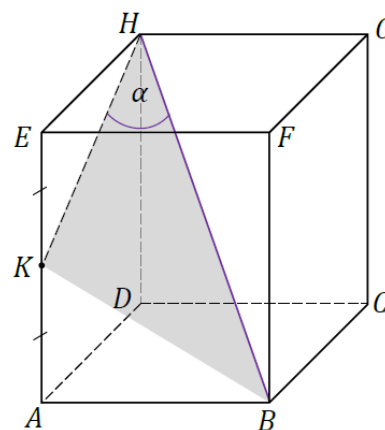
B. $\alpha = \sphericalangle BHE$



C. $\alpha = \sphericalangle BHA$



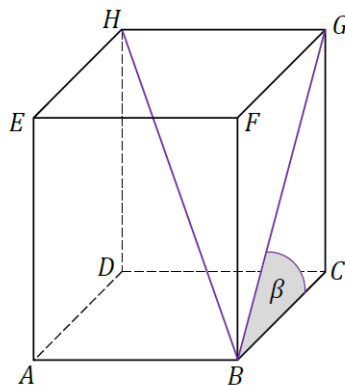
D. $\alpha = \sphericalangle BHK$



2.2. W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{7}, \quad |BG| = 2\sqrt{130}, \quad |BH| = 2\sqrt{194}$$

gdzie odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$, β jest miarą kąta $\sphericalangle GBC$. Sytuację ilustruje rysunek poniżej.

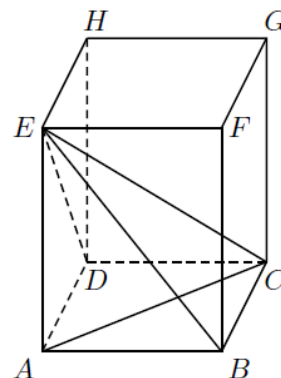


Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

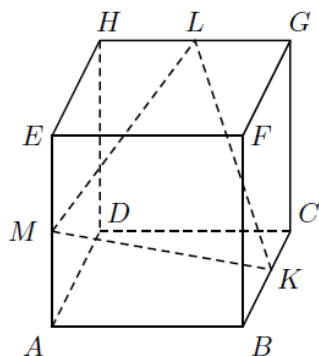
3. **Oblicz** długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a przekątna ta tworzy:

- z przekątną podstawy kąt 45° ,
- z jedną z krawędzi bocznych kąt 30° ,
- z przekątną jednej ze ścian bocznych kąt 30° .

4. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4, a miara kąta $|\sphericalangle ACE| = 60^\circ$. **Oblicz** objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na rysunku.



5. Punkty K , L i M są środkami krawędzi BC , GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek).

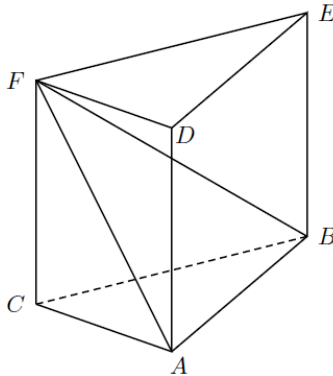


Oblicz pole trójkąta KLM .

6. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 8 cm i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma wspólny wierzchołek kąt, którego cosinus jest równy $\frac{2}{3}$.

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

7. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy z krawędzią podstawy kąt α . **Uzasadnij**, że pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe $4d^2 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$.
8. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD , BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 8, a pole trójkąta ABF jest równe 52.



Oblicz objętość tego graniastosłupa.

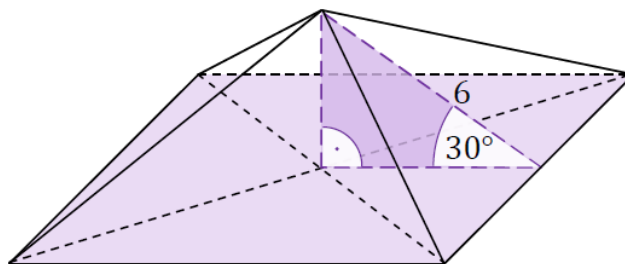
9. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o podstawach ABC i $A'B'C'$ oraz krawędziach bocznych AA' , BB' , CC' . Kąt między przekątną ściany bocznej AC' a krawędzią podstawy AC ma miarę α . Promień okręgu wpisanego w podstawę graniastosłupa ma długość r . **Oblicz** pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.
10. **Oblicz** pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa wiedząc, że ma on 18 krawędzi i każda z nich jest równa 4 cm.
11. Dane są dwa prostopadłościany podobne: \mathcal{B}_1 oraz \mathcal{B}_2 . Objętość prostopadłościanu \mathcal{B}_1 jest równa V , a objętość prostopadłościanu \mathcal{B}_2 jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu \mathcal{B}_1 jest równe P .

Dokończ zdanie. **Zaznacz** odpowiedź **A**, **B** albo **C** oraz jej uzasadnienie **1.**, **2.** albo **3.**

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu \mathcal{B}_2 jest równe

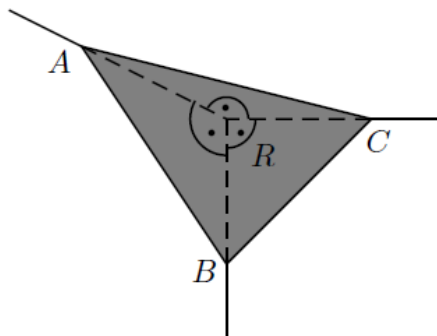
A.	$27P$,	ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy	1.	stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.
B.	$9P$,		2.	pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.
C.	$3\sqrt{3}P$,		3.	kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

12. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° i ma długość równą 6 (zobacz rysunek).



Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. **Zapisz** obliczenia.

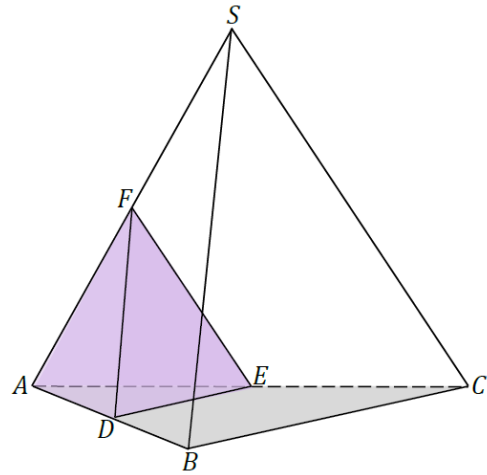
13. Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 17 cm. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 18 cm i 24 cm. **Oblicz** objętość tego ostrosłupa.
14. Narożnik między dwiema ścianami i sufitem prostopadłościennego pokoju należy zamaskować trójkątnym fragmentem płyty gipsowo kartonowej (zobacz rysunek).



Wiedząc, że $|RA| = |RB| = |RC| = 1$ m, **oblicz** objętość narożnika zamaskowanego tą płytą. Wynik **zaokrąglij** do $0,01$ m³.

15. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej ma długość $4\sqrt{3}$, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . **Oblicz** objętość ostrosłupa.
16. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość a . Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. **Oblicz** cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.
17. Każda z krawędzi podstawy trójkątnej ostrosłupa ma długość $10\sqrt{3}$, a każda jego krawędź boczna ma długość 15. **Oblicz** wysokość tego ostrosłupa. **Zapisz** obliczenia.
18. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC . Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa. **Oblicz** objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.

19. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ zaznaczono środki krawędzi AB , AC i AS odpowiednio punktami D , E , F (zobacz rysunek).

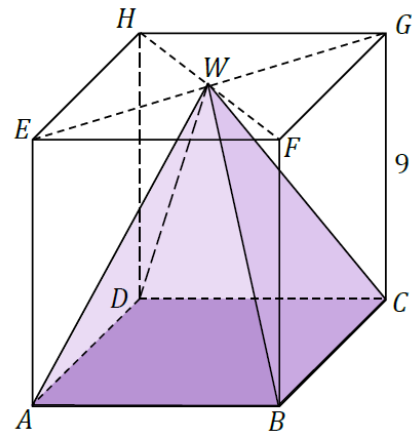


Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

Wybierz **P**, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Pole powierzchni ostrosłupa $ADEF$ jest dwukrotnie mniejsze od pola powierzchni ostrosłupa $ABCS$.	P	F
2.	Objętość ostrosłupa $ADEF$ jest ośmiokrotnie mniejsza od objętości ostrosłupa $ABCS$.	P	F

20. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 9. Wierzchołki podstawy $ABCD$ sześcianu połączono odcinkami z punktem W , który jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $EFGH$. Otrzymano w ten sposób ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDW$ (zobacz rysunek).



- 20.1. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

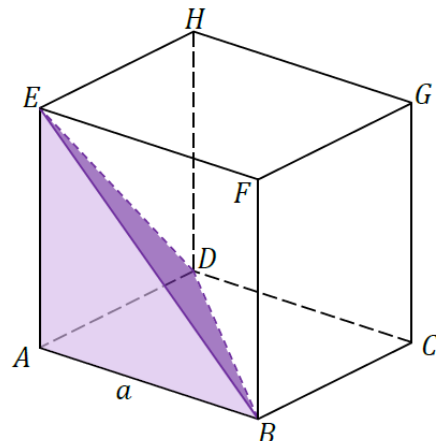
Objętość V ostrosłupa $ABCDW$ jest równa

- A. 243 B. 364,5 C. 489 D. 729

- 20.2. **Oblicz** cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

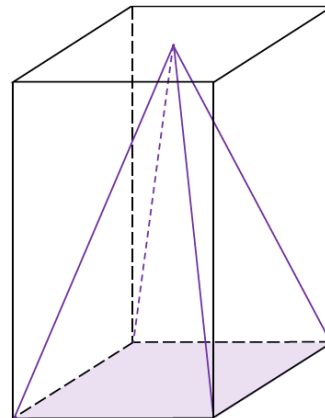
Zapisz obliczenia.

21. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a . Punkty A , B , D i E są wierzchołkami ostrosłupa (zobacz rysunek). **Oblicz** pole powierzchni ostrosłupa $ABDE$. **Zapisz** obliczenia.



22. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H = 16$. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy $\frac{3}{5}$. **Oblicz** pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

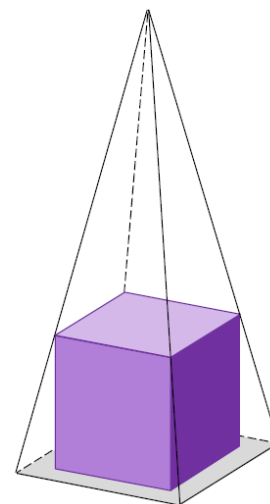
23. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, o krawędzi podstawy a oraz wysokości h . Wpisano w niego ostrosłup prawidłowy czworokątny w taki sposób, że krawędzie podstawy ostrosłupa i graniastosłupa pokrywają się, zaś górny wierzchołek ostrosłupa jest środkiem podstawy górnej graniastosłupa (zobacz rysunek). Niech F będzie bryłą powstałą po wycięciu ostrosłupa z graniastosłupa.



Dokończ zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych. Różnica objętości bryły F i objętości ostrosłupa jest równa

- A. $\frac{1}{3}a^2h$ B. $\frac{2}{3}a^2h$ C. $\frac{1}{3}ah^2$ D. $\frac{2}{3}ah^2$

24. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 2 i wysokości 8. Wpisano w niego sześcian w taki sposób, że dolna podstawa sześcianu zawiera się w podstawie ostrosłupa, a krawędzie jego górnej podstawy zawierają się w ścianach bocznych ostrosłupa (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

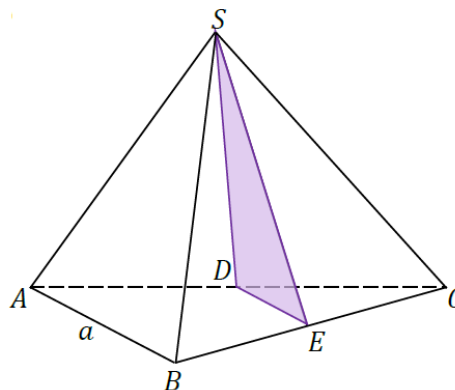
Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Krawędź sześcianu jest dłuższa niż 1,5.	P	F
2.	Ostrosłup jest czterokrotnie wyższy od sześcianu.	P	F
3.	Objętość sześcianu jest większa od 4.	P	F

25. Każda krawędź czworoscianu $ABCS$ ma długość a . Punkty D i E są środkami boków – odpowiednio – AC oraz BC (zobacz rysunek).

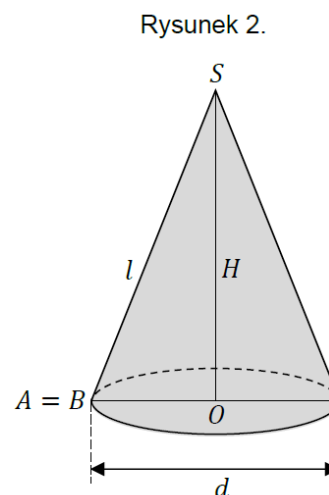
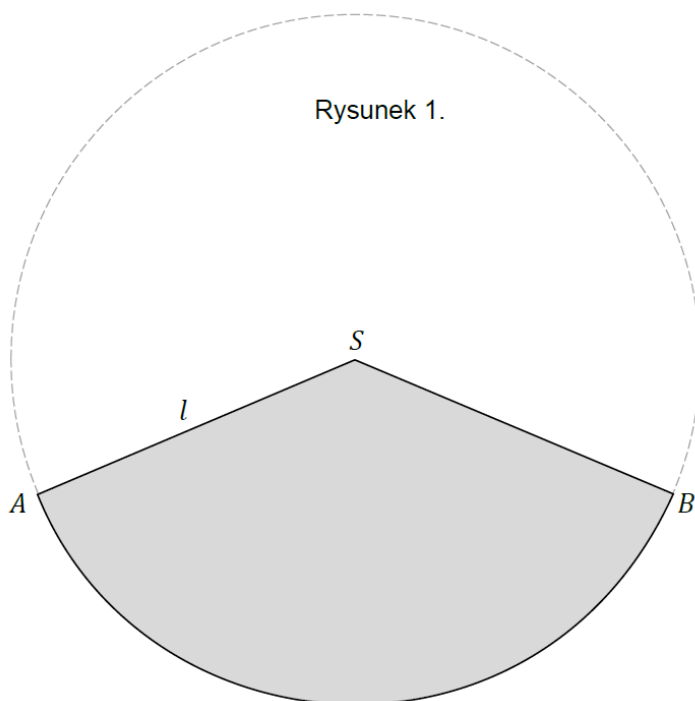
Oblicz pole trójkąta DES . **Zapisz** obliczenia.

26. Tworząca stożka ma długość 17, a wysokość stożka jest krótsza od średnicy jego podstawy o 22. **Oblicz** pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.



27. Dany jest stożek o objętości 8π , w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy $3 : 8$. **Oblicz** pole powierzchni bocznej tego stożka.

28. Hania zaprojektowała i wykonała czapczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapczka miała kształt powierzchni bocznej stożka o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l . Żeby wykonać czapczkę, Hania najpierw narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie wycinka koła o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowiednio ją wymodelowała i skleila odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.). Do obliczeń **przyjmij**, że rzeczywiste figury są idealne.



28.1. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapczka, ma miarę (w zaokrągleniu do 1°)

A. 44°

B. 136°

C. 22°

D. 68°

Wskazówka: skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

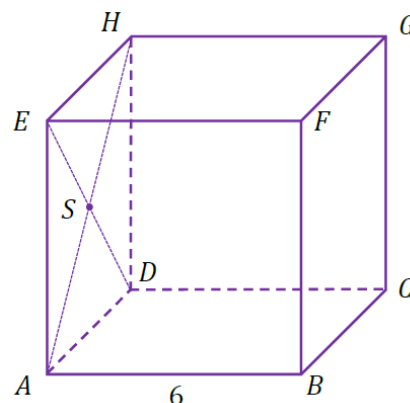
28.2. **Oblicz** miarę kąta $\angle BSA$ wycinka koła, z którego powstała powierzchnia boczna stożka opisanego we wstępie do zadania. Miarę kąta $\angle BSA$ **podaj** w zaokrągleniu do jednego stopnia.

29. Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° , przetopiono na 6 jednakowych kulek. **Oblicz** promień kulki.

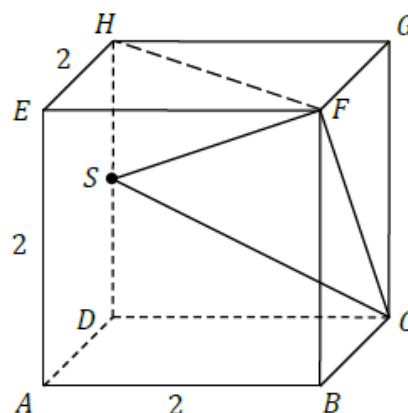
30. Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. **Oblicz** objętość kapsuły lądownika.
31. Metalową kulę o promieniu 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość wynoszą odpowiednio 16 cm i 12 cm przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. **Oblicz** wysokość walca.
32. Metalową kulę o promieniu $R = 5$ cm w całości przetopiono na kuleczki o promieniu $r = 0,25$ cm. Ile uzyskano w ten sposób kuleczek?
33. a) Dane są dwie kule. Objętość pierwszej kuli jest równa 36π cm³, a druga kula ma promień dwa razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. **Podaj** objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?
- b) Po dopompowaniu powierzchnia kulistego balonu zwiększyła się o 44%. O ile wzrosła objętość balonu?

Poziom rozszerzony

34. (R) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek). **Oblicz** wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. **Zapisz** obliczenia.

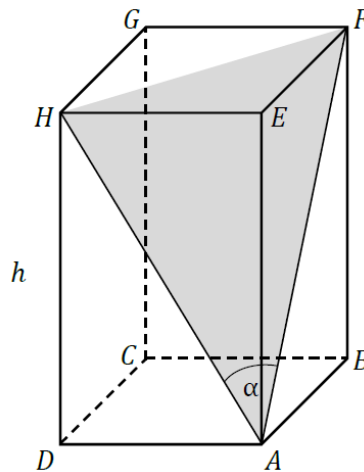


35. (R) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 2. Punkt S jest środkiem krawędzi DH (zobacz rysunek). **Oblicz** miarę najmniejszego kąta wewnętrznego trójkąta CFS .



36. (R) Przekątne sąsiednich ścian bocznych prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka tworzą z podstawą kąty o miarach $\frac{\pi}{3}$ i α . Cosinus kąta między tymi przekątnymi jest równy $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **Wyznacz** miarę kąta α .

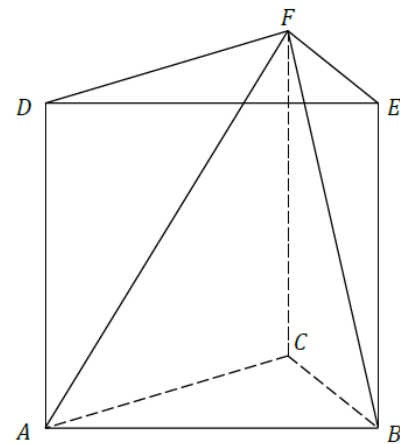
37. (R) Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe 26,4.



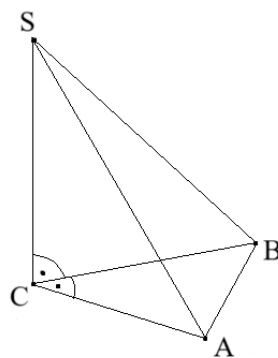
Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.

38. (R) Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 4, a wysokość graniastosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek).

Oblicz sinus kąta AFB .



39. (R) Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny ABC o długościach przyprostokątnych $|AC| = 15$ i $|BC| = 20$. Krawędź CS ostrosłupa jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i ma długość 16 (zobacz rysunek).

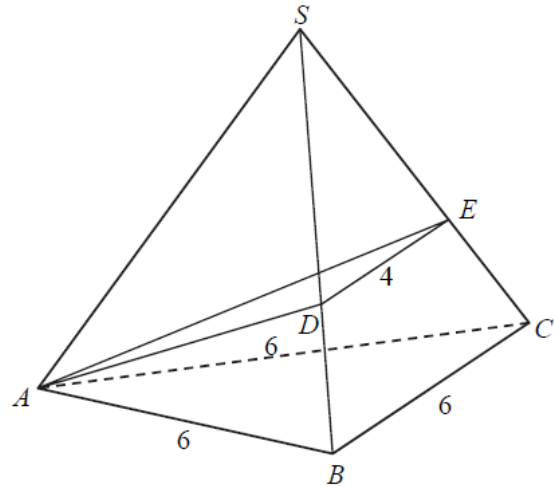


Oblicz długość wysokości trójkąta ABS poprowadzonej do boku AB .

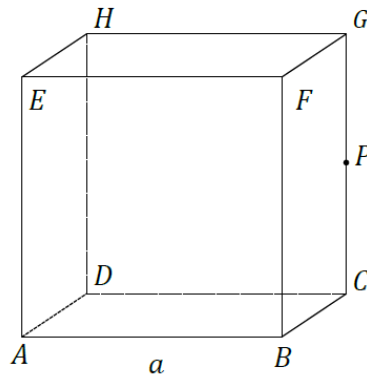
40. (R) Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ramiona tego trapezu mają długość $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa 30° . Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α , taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{2}$. **Oblicz** objętość tego ostrosłupa.

41. (R) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym P . Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka S ma miarę 2α . Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym. **Oblicz** współczynnik k . **Zapisz** obliczenia.
42. (R) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . **Wykaż**, że tangens kąta dwuściennego między ścianą boczną i podstawą jest równy $2 \operatorname{tg} \alpha$.

43. (R) Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6. Na krawędziach bocznych BS i CS wybrano punkty, odpowiednio D i E , takie że $|BD| = |CD|$ oraz $|DE| = 4$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej BCS ostrosłupa. **Oblicz** objętość tego ostrosłupa.



44. (R) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a . Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu (zobacz rysunek poniżej).



$$|PG| = |PC|$$

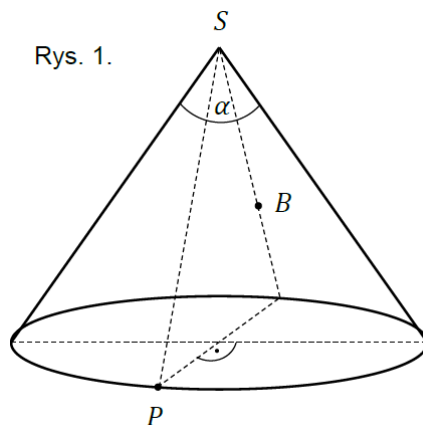
Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P .

45. (R) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę. **Oblicz** stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do 1°).

46. (R) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD$ o podstawie $ABCD$. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość a . Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α takim, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Przez krawędź BC podstawy ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę π prostopadłą do ściany bocznej SAD . **Sporządź** rysunek tego ostrosłupa, **zaznacz** na rysunku przekrój wyznaczony przez płaszczyznę π i **nazwij** figurę, która jest tym przekrojem. **Oblicz** pole otrzymanego przekroju. **Zapisz** obliczenia.
47. (R) W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π , równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. **Oblicz** odległość środka S kuli od płaszczyzny π , tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP , gdzie P jest punktem płaszczyzny π .
48. (R) Tomek i Marek chcą wejść docelowo na szczyt S pewnej góry. W chwili początkowej znajdują się w punkcie P położonym na stoku góry dokładnie na północ od szczytu na wysokości H_0 metrów n.p.m.



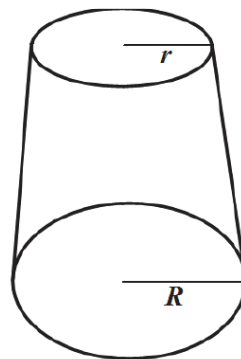
Tomek i Marek chcą dotrzeć do bazy B znajdującej się dokładnie na południe od szczytu na przeciwnym południowym stoku góry na wysokości H_1 metrów n.p.m., a następnie z bazy wejść na szczyt leżący na wysokości H_2 metrów n.p.m. (patrz rysunek 1.).



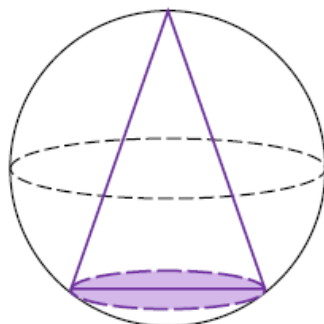
Oblicz długość najkrótszej drogi, jaką muszą pokonać, aby dotrzeć do bazy. **Przyjmij**, że góra jest stożkiem o kącie rozwarcia α .

Wskazówka: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła. Najkrótsza droga do bazy odpowiada najkrótszej drodze z punktu P do B na wycinku koła.

49. (R) Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$, gdzie r i R są promieniami podstaw ($r < R$), a H jest wysokością bryły. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π , a $r = 6$. **Oblicz** cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.



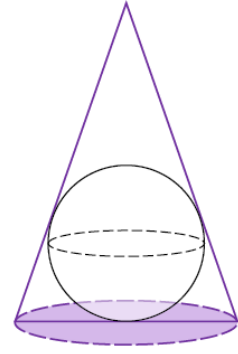
50. (R) Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. **Oblicz** długość krawędzi podstawy tego graniastoslupa.
51. (R) Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P . **Oblicz** wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. **Oblicz** tę największą objętość.
52. (R) Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. **Oblicz** wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.
53. (R) Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 16 cm obraca się dookoła podstawy. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość otrzymanej bryły będzie maksymalna?
54. (R) Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki zawierające środek kuli i wpisane w tę kulę, to znaczy takie, w których:
- wierzchołek leży na powierzchni kuli,
 - okrąg, będący krawędzią podstawy stożka, leży na powierzchni kuli (zobacz rysunek).



Oblicz promień podstawy tego stożka, który ma największą objętość. **Oblicz** objętość tego stożka. **Zapisz** obliczenia.

55. (R) Dana jest kula o promieniu 1. Rozpatrujemy wszystkie stożki opisane na tej kuli, to znaczy takie, których:

- podstawa ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą
- każda tworząca ma dokładnie jeden punkt wspólny z kulą (zobacz rysunek).



55. 1. **Wykaż**, że objętość V stożka o wysokości h wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}.$$

55. 2. **Oblicz** wysokość tego stożka, który ma najmniejszą objętość. **Oblicz** objętość tego stożka. **Zapisz** obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z informacji, że objętość stożka o wysokości h wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{h^2\pi}{3(h-2)}.$$