1. Zbiór A ma 12 elementów, zbiór B ma 9 elementów, zbiór $A \cup B$ ma 17 elementów. **Ile** elementów należy do zbioru $A \backslash B$.

2. **Wykonaj** działania na zbiorach:
   a) Z, N,
   b) Q, IQ,
   c) $A = \{x \in N: 10|x\}$, $B = \{x \in N: 5|x\}$.

3. **Wykonaj** działania na przedziałach A, B ($A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash B,\ B \backslash A$) oraz **wyznacz** A', B', gdy:
   a) $A = \langle 0; 1)$, $B = \langle 1; \infty)$,
   b) $A = \langle -\sqrt{2}; 10\rangle$, $B = \langle 0; \pi)$,
   c) $A = \left\langle -\frac{1}{3}; \infty\right)$, $B = (-\infty; 7\rangle$.

4. **Wykonaj** działania na zbiorach:
   a) $(-\infty; 6\rangle \cap N$,
   b) $\langle -3; \sqrt{26}\big) \cap Z$,
   c) $A \cap B$, gdy: $A = \{x \in R: |x| < 3\}$, $B = \{x \in R: |x + 1| \leq 2\}$,
   d) $A \cup B$, $A \cap B$, $B \backslash A$, gdy: $A = \{0, 1, 3, 5, 7\}$, $B = \{-2, 0, 5, 12\}$.

5. **Wyznacz** wszystkie liczby $x \in R$, które spełniają nierówność $x^2 < 4x$, ale nie spełniają nierówności $|x + 2| < 3$.

5. A) Dane są zbiory: $A = \{x \in R : |x - 4| \geq 7\}$ oraz $B = \{x \in R : x^2 > 0\}$. **Zaznacz** na osi liczbowej:
   a) zbiór A,
   b) zbiór B,
   c) zbiór $C = B \setminus A$.

6. Liczbę $a = \left(\sqrt{2} + \sqrt{7}\right)^2$ można zapisać w postaci $a = x + y\sqrt{14}$, gdzie $x \in$ Z oraz $y \in$ Z.
   Uzupełnij poniższe równości. **Wpisz** właściwe liczby w wykropkowanych miejscach.

   $x =$ ……………………., $y =$ ……………………

7. **Oceń** prawdziwość poniższych zdań. **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Wyrażenie $2x^2 - 1$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\left(1 - x\sqrt{2}\right)\left(x\sqrt{2} - 1\right)$.	**P**	**F**
2.	Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(2 + x)^3 - x^2(x + 6) - 12x$ jest równa 8.	**P**	**F**

8. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.
Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y wyrażenie $9-(x^2-2xy+y^2)$ jest równe

A. $[3-(x-2y)]^2$ **B.** $[3+(x-2y)]^2$ **C.** $[3-(x-y)]\cdot[3+(x-y)]$
D. $[3-(x+2y)]^2$ **E.** $[3-(x+2y)]\cdot[3+(x+2y)]$ **F.** $-[(x-y)-3]\cdot[(x-y)+3]$

9. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba $\left[\left(1+\sqrt{8}\right)^2-\left(1-2\sqrt{2}\right)^2\right]^2$ jest równa:

A. 128 **B.** $1-\sqrt{2}$ **C.** 32 **D.** 64

10. Dana jest liczba $x=a-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$, gdzie a należy do zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ są niewymierne.
Dokończ zdanie. **Zaznacz** <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
Liczba x jest wymierna dla:
A. $a=5$
B. $a=-\sqrt{3}+\sqrt{2}$
C. $a=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+0{,}3$
D. $a=6$
E. $a=-2\sqrt{6}+12{,}5$
F. $a=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{6}$
G. $a=-\sqrt{6}$

10. A) Dla $a=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ i $b=\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, oblicz $a\cdot b$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, $(a-b)^2$, $\frac{1}{a^2}+b^2$.

11. Dana jest liczba $a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$. **Wykaż**, że a jest liczbą całkowitą.

11. A) Dane są dwie liczby x i y, takie, że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Oblicz** wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$.
Wynik **podaj** bez niewymierności w mianowniku.

12. **Wykaż**, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2-8xy+5y^2\geq 0$.

13. **Wykaż**, że dla każdych trzech dodatnich liczb a, b i c takich, że $a<b$, spełniona jest nierówność $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$.

13. A) Liczba $(3-2\sqrt{3})^3$ jest równa

A. $27-24\sqrt{3}$ **B.** $27-30\sqrt{3}$ **C.** $135 - 78\sqrt{3}$ **D.** $135 - 30\sqrt{3}$.

13. B) W rozwinięciu wyrażenia $(2\sqrt{3}x+4y)^3$ współczynnik przy iloczynie xy^2 jest równy

A. $32\sqrt{3}$ **B.** 48 **C.** $96\sqrt{3}$ **D.** 144

13. C) Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b, które spełniają warunki: $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz $a^3+b^3=(a+b)^3$. **Oblicz** wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, spełniających powyższe warunki.

14. Rozważmy dwie kolejne liczby naturalne a i b takie, że obie są <u>niepodzielne</u> przez 3. **Udowodnij**, że liczba a^3+b^3 <u>jest podzielna</u> przez 9.

14. A) **Udowodnij**, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba k^3m-km^3 jest podzielna przez 6.

Poziom rozszerzony

14. B) (R) Niech a, b, c będą takimi liczbami całkowitymi, że $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{6}=0$. **Wykaż**, że $a=b=c=0$.

15. (R) Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2+2a=4b^2+4b$. **Wykaż**, że $a=2b$.

16. (R) **Wykaż**, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2+y^2=2$, prawdziwa jest nierówność $x+y \leq 2$.

16. A) (R) Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x+y=4$ i nierówność $x^3-x^2y \leq xy^2-y^3$. **Wykaż**, że $x=2$ oraz $y=2$.

17. (R) **Udowodnij**, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$.

17. A) (R) **Wykaż**, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y, spełniających warunek $x+y \geq 1$, prawdziwa jest nierówność $x^3+2xy+y^3 \geq x^2+xy(x+y)+y^2$.

18. (R) **Udowodnij**, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a}+\frac{y}{x}>2$.

18. A) (R) Suma liczb całkowitych x i y jest podzielna przez 3. **Wykaż**, że suma sześcianów liczb x i y jest podzielna przez 9.

19. (R) W rozwinięciu wyrażenia $(a+b)^n$ dla pewnego $n \in N$ suma współczynników przy wyrazach $a^{n-2}b^2$ oraz $a^{n-1}b$ jest równa 66. **Oblicz** n. **Zapisz** obliczenia.

19. A) (R) **Wykaż**, że liczba $a = \left(\sqrt{5}+2\right)^{2022} + \left(\sqrt{5}-2\right)^{2022}$ jest wymierna.