1. **Rozwiąż** równania:
   a) $-9x^2 + 100 = -5x^2$,
   b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$,
   c) $25(t-1)^2 - 9(t+2)^2 = 0$,
   d) $(y+3)^2 + 25 = 0$,
   e) $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$,
   f) $(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 6 = 0$.

2. **Rozwiąż** nierówności kwadratowe:
   a) $8x^2 - 72x \leq 0$,
   b) $2x^2 - 4x > 3x^2 - 6x$,
   c) $2(x-1)(x+3) > x - 1$,
   d) $k^2 + 1 > 0$,
   e) $-4x^2 + 7x - 4 \geq 0$,
   f) $x^2 - 5x \leq 14$,
   g) $(k-2)^2 > 0$,
   h) $(3y-1)^2 \leq 0$.

3. **Podaj** współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f określonej wzorem
   a) $f(x) = \sqrt{2}x^2$,
   b) $f(x) = -4x^2 + 9$,
   c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$,
   d) $f(x) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3$,
   e) $f(x) = (x-5)(x+3)$,
   f) $f(x) = -x^2 - x + 2$.

4. **Sporządź** wykres funkcji $f(x) = -(x+3)^2 + 4$ i **omów** jej własności.

5. Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f . **Oblicz** $\frac{f(6)}{f(12)}$.

6. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 3x^2 + bx - 5$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
   Współczynnik *b* jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera.
   Dokończ zdanie. **Zaznacz** odpowiedź **A**, **B** albo **C** oraz jej uzasadnienie **1**., **2**. albo **3**.
   Funkcja f

A.	ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,	ponieważ	**1.**	$b^2 + 60 > 0$.
B.	ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,		**2.**	$b^2 + 60 = 0$.
C.	nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,		**3.**	$b^2 + 60 < 0$.

7. **Wyznacz** współczynniki b i c trójmianu $f(x) = x^2 + bx + c$, jeśli spełniony jest warunek:

   a) trójmian osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,

   b) trójmian przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1;\ 4)$,

   c) wykres trójmianu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.

8. Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $y = x^2 + 5x + 6$ gdzie $x \in R$.

   Dokończ zadania. **Zaznacz** odpowiedź spośród **A–D** oraz odpowiedź spośród **E–H.**

   8. 1. Postać kanoniczna funkcji f wyraża się wzorem

   A. $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

   B. $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

   C. $y = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{2}$

   D. $y = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}$

   8. 2. Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem

   E. $y = (x - 2)(x - 3)$

   F. $y = (x - 2)(x + 3)$

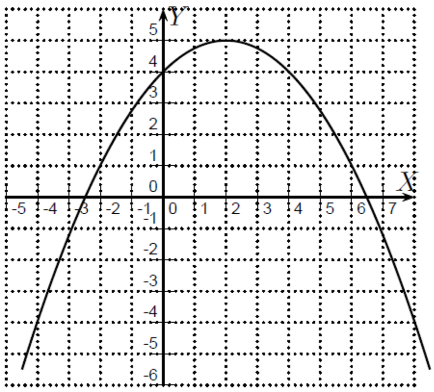
   G. $y = (x + 2)(x - 3)$

   H. $y = (x + 2)(x + 3)$

8. A) Pewna parabola o wierzchołku $W = (2, 5)$ przecina oś w punkcie $A = (0, 4)$. **Wyznacz:**

   a) wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola (rys. obok),

   b) miejsca zerowe tej funkcji.



9. Wiedząc, że liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx - 12$, **wyznacz** współczynnik b oraz drugie miejsce zerowe tej funkcji. **Przedstaw** wzór funkcji w postaci kanonicznej i iloczynowej.

10. a) **Wyznacz** współczynnik b tak, aby przedział $\langle -8; \infty)$ był zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + bx + 1$.

    b) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (1 - x)(x + 1) + 2x$. **Wyznacz** zbiór wartości funkcji f.

11. Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$. **Oblicz** wartość współczynnika a.

11. A) Dana jest funkcja kwadratowa f. Do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(0, 8)$, a osią symetrii jej wykresu jest prosta o równaniu $x = 4$. Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest $x_1 = 2$. **Wyznacz** i **zapisz** wzór funkcji $y = f(x)$ w postaci iloczynowej.

12. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -2x^2 + bx + c$ i przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (-4; 2)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prosta $x = 1$.	**P**	**F**
2.	Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem $f(x) = -2(x + 4)(x - 2)$.	**P**	**F**

13. **Oblicz** najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$.

14. **Oblicz** najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 3$ przedziale $\langle 0,4 \rangle$.

15. Wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny. Punkty $A = (-5,\ 0)$ i $B = (3,\ 0)$ należą do wykresu funkcji f. **Oblicz** wartości współczynników a, b oraz c. **Wyznacz** przedziały monotoniczności funkcji.

15. A) Zbiorem wartości funkcji kwadratowej g jest przedział $(-\infty;5\rangle$, a zbiorem rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2; 8)$. **Wyznacz** wzór funkcji g.

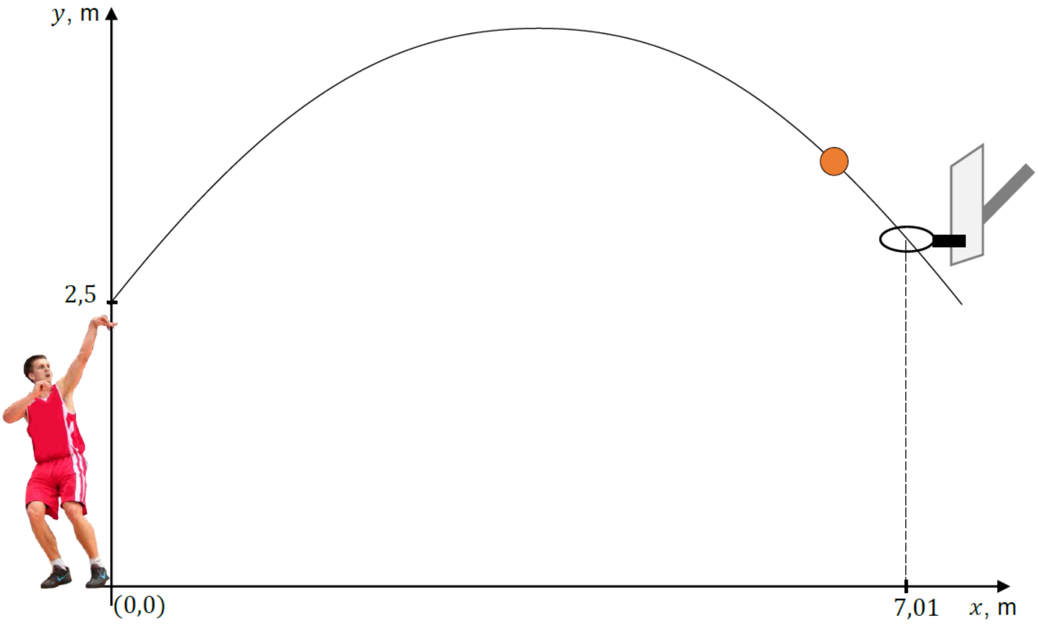
15. B) Dla każdej liczby rzeczywistej b równanie $y = \frac{1}{2}x^2 - bx + 2$ opisuje pewną parabolę. **Wyznacz** wszystkie wartości parametru b, dla których wierzchołek paraboli leży nad osią OX.

16. a) **Znajdź** trzy kolejne liczby parzyste tak, aby suma kwadratów dwóch mniejszych liczb była równa kwadratowi trzeciej liczby.

b) Liczbę 42 **przedstaw** w postaci sumy dwóch składników tak, by różnica ich kwadratów była równa 168.

17. Na podstawie zasad dynamiki można udowodnić, że torem rzutu – przy pominięciu oporów powietrza – jest fragment paraboli. Koszykarz wykonał rzut do kosza z odległości $x_k = 7{,}01$ m, licząc od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej. Do opisu toru ruchu przyjmiemy układ współrzędnych, w którym środek piłki w chwili początkowej znajdował się w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2{,}50$ m. Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem: $y = -0{,}174x^2 + 1{,}3x + 2{,}5$ Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek

kołowej obręczy kosza. Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.



17.1. Dokończ zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obręcz kosza znajduje się na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do 0,01 m)

A. 3,04 m **B.** 3,06 m **C.** 3,80 m **D.** 4,93 m

17.2. Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. **Zapisz** wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

17.3. W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. **Przyjmij**, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej przeszkody. Promień piłki jest równy 0,12 m. **Oblicz** współrzędną x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

18. Szyba w oknie ma kształt prostokąta o obwodzie 4 m. **Jakie** są jej wymiary, jeśli wiadomo, że jej pole P jest największe z możliwych. **Oblicz** to pole.

19. Właściciel sklepu kupuje aparaty fotograficzne płacąc producentowi 100 zł za sztukę i sprzedaje 40 aparatów miesięcznie po 160 zł. Właściciel oszacował, że każda obniżka ceny aparatu o 1 zł zwiększa liczbę sprzedanych aparatów o jedną sztukę. **Jaką** powinien ustalić cenę, aby jego zysk był największy?

20. a) **Wykaż**, że jeżeli $x + y = 5$, to $x^2 + y^2 \geq \frac{25}{2}$.

b) **Wykaż**, że jeżeli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

c) **Udowodnij**, że jeśli x, y, z są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y + z = 1$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

Poziom rozszerzony

21. (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $\sqrt{x-1} = x - 3$,

b) $2x^2 + x|2x - 1| \leq 3$.

21. A) (R) **Rozwiąż** równanie $|x| + |1 - x^2| = 1$.

22. (R) **Rozwiąż** nierówności:

a) $5\sqrt{x-3} > x + 1$,

b) $(|x| - 2)^2 \leq 1$.

22. A) (R) **Rozwiąż** nierówność $|x| + |x - 2| \geq x^2 - 2x + 1$.

23. (R) **Sporządź** wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, **podaj** wszystkie wartości x, dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x, dla których przyjmuje minima lokalne oraz wartość najmniejszą i największą.

24. (R) **Wyznacz** wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f określona wzorem $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(1 - m)x + 2$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

25. (R) Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $20x^2 - 24mx + 18m^2 \geq 4x + 12m - 5$.

26. (R) Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = px^2 + (p - 1)x + 1 - 2p$ dla każdego $x \in R$. **Wyznacz** wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

27. (R) Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 + 2(m + 1)x + 6m + 1$. **Wyznacz** wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 , x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $\lceil x_1 - x_2 \rceil < 3$.

28. (R) **Wyznacz** wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$2x^2 - (2m + 7)x + \ m^2 - 3m + 21 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek $x_1 = 2x_2$. **Zapisz** obliczenia.

29. (R) **Wyznacz** wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki: $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ oraz $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

30. (R) **Wyznacz** wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + (m + 1)x - m^2 + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 $(x_1 \neq x_2)$, spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$.

31. (R) **Wyznacz** wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(x+2)\big(x^2-(m-4)x+(m^2-7m+12)\big)=0$$

ma trzy pierwiastki rzeczywiste o tym samym znaku.

32. (R) **Wyznacz** wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-3mx+2m^2+1=0$ ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty;3)$.