

6. Wielomiany

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

- a) Sprawdź, czy wielomian $w(x) = 8x^3 - 27$ jest równy wielomianowi $p(x) = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$.

b) Rozłóż wielomian na czynniki:
 $p(x) = (2x - 4)^3 - (x - 2)^3$,
 $g(x) = -5x^5 + 30x^4 - 45x^3$,
 $z(x) = x^4 - 3x^3 + 8x - 24$,
 $w(x) = x^3 - 21x + 20$,
 $u(x) = (x^2 + x + 4)(x^2 + 6x - 7)$.
- Rozwiąż równanie:

 - $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$,
 - $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$,
 - $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$,
 - $x^3 - x = x^2 - 1$.
- Wyznacz współczynniki a, b wielomianu $w(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b$, gdy $w(1) = 3$ i $w(0) = -2$.
- Liczby 3 i (-1) są pierwiastkami wielomianu $w(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 30$. Wyznacz wartości współczynników a i b .
- Dany jest wielomian $w(x) = 2x^3 + ax^2 - 14x + b$.

 - Dla $a = 0$ i $b = 0$ otrzymamy wielomian $w(x) = 2x^3 - 14x$. Rozwiąż równanie $2x^3 - 14x = 0$.
 - Dobierz wartości a i b tak, aby pierwiastkami wielomianu $w(x)$ były liczby 2 i (-3) .
- Pierwiastkiem równania $2x^3 - (3m - 1)x^2 + 7x - m = 0$ jest liczba (-1) .

 - Wyznacz wartość parametru m .
 - (R) Wyznacz pozostałe pierwiastki tego równania.
- Dany jest wielomian $w(x) = x^3 + kx^2 - 4$.

 - Wyznacz współczynnik k tego wielomianu wiedząc, że pierwiastkiem wielomianu jest liczba (-2) .
 - Dla wyznaczonej wartości k rozłóż wielomian na czynniki i podaj wszystkie jego pierwiastki.
- Dane są wielomiany: $q(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$, $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$. Oblicz wartości m i n , dla których wielomian $w(x) = x^4 + (m - 4)x^3 - (2n + 6)x^2 - 38x - 3$ równy jest wielomianowi $q(x) - 2p(x)$.
- Dane są przedziały $(-\infty, m^3 + 3)$ i $\langle 3m^2 + m, \infty)$, gdzie $m \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie wartości m , dla których część wspólna tych przedziałów jest zbiorem jednoelementowym.
- Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie (-2) . Wartość wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ dla argumentu 2 jest równa 4.

 - Oblicz $w(-3)$.
 - (R) Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x + 1$.
- Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

 - Wielomian $w(x) = (a^2 - 5a - 6)x^3 + 3x^2 - 8x + 6$ jest wielomianem stopnia drugiego dla:
(A) $a \in \mathbb{R}$ (B) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (C) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 6\}$ (D) $a \in \{-1; 6\}$
 - Wskaż zbiór rozwiązań równania $x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$:
(A) $\{-1; 3\}$ (B) $\{1; -3\}$ (C) $\{-3; -1; 1; 3\}$ (D) \emptyset
 - Wielomian $w(x) = x^6 + x^3 - 2$ jest równy iloczynowi
(A) $(x^3 + 1)(x^2 - 2)$ (B) $(x^3 - 1)(x^3 + 2)$ (C) $(x^2 + 2)(x^4 - 1)$ (D) $(x^2 - 2)(x^4 + 1)$
 - Dane są wielomiany $w(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $p(x) = 2x^3 + 12x$. Wielomian $w(x) + p(x)$ jest równy
(A) $5x^2 + 12x - 3$ (B) $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$
(C) $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$ (D) $4x^3 + 12x - 3$
 - Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + 6x - 4$. Współczynnik a jest równy
(A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4

6. Wielomiany

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

12. (R) Dla jakich wartości parametru a wielomian $w(x) = a^2x^3 - 4ax + 5$ jest podzielny przez dwumian $q(x) = x + 1$.
13. (R) Niech $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 38x + 21$.
a) Wykaż, że $(x + 3)$ jest dzielnikiem wielomianu $w(x)$.
b) Wielomian $w(x)$ rozłóż na iloczyn czynników liniowych o współczynnikach całkowitych.
14. (R) Nie wykonując dzielenia wielomianów:
a) wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ przez wielomian $q(x) = x - \sqrt{2}$.
b) sprawdź, czy wielomian $w(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ jest podzielny przez wielomian $p(x) = x^2 - 3x + 2$.
15. (R) W wyniku dzielenia wielomianu $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$ przez wielomian $p(x)$ otrzymano iloraz $q(x) = x^2 - 3x + 2$ i resztę $r(x) = -1$. Wyznacz wielomian $p(x)$.
16. Wyznacz wartości współczynników a i b wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ wiedząc, że $w(2) = 7$ oraz reszta z dzielenia w przez dwumian $x - 3$ jest równa 10.
17. (R) Wykonaj dzielenie wielomianu $w(x) = -3x^4 + 5x^3 + x^2 + 10x + 6$ przez $q(x) = x^2 + 2$ i zapisz go w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$.
18. (R) Wyznacz wartości parametrów p, q , dla których liczba (-1) jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$.
19. (R) Dany jest wielomian $w(x)$. Wiedząc, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez $(x + 1)$ wynosi 2, przez $(x - 8)$ wynosi (-7) , podaj wielomian, który jest resztą z dzielenia $w(x)$ przez $(x + 1)(x - 8)$.
20. (R) Wiedząc, że liczby 1 oraz 4 są pierwiastkami wielomianu $w(x) = x^4 + mx^3 + 9x^2 + 38x + n$ znajdź pozostałe pierwiastki i rozwiąż nierówność $w(x) < 0$.
21. (R) Wielomian $w(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6px + 9$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Oblicz p . Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.
22. (R) O wielomianie $w(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ wiadomo, że liczba 1 jest jego pierwiastkiem dwukrotnym oraz że $w(x)$ jest podzielny przez dwumian $x + 2$. Oblicz współczynniki a, b, c . Dla obliczonych wartości a, b, c rozwiąż nierówność $w(x + 1) < 0$.
23. (R) Dany jest wielomian $w(x) = 2x^4 - ax^3 - bx^2 - cx + 3$. Wyznacz współczynniki tego wielomianu wiedząc, że c, a, b są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 3$, liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu. Rozwiąż $w(x) \leq 0$. Zakoduj cyfry tworzące ciąg geometryczny.
24. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^3 - 9x^2 + 27}}$.
25. (R) Rozwiąż równanie:
a) $27x^7 = -8x^4$,
b) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$.
26. (R) Rozwiąż nierówność:
a) $-3x^2(x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)^2 < 0$,
b) $x^3 \geq 81x$,
c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$.
27. (R) Rozwiąż nierówność: $x^3 - x^2 + 6|x - 1| \leq 0$.
28. (R) Funkcja $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ osiąga ekstremum $y = -4$ dla $x = 1$. Wyznacz współczynniki a, b, c tej funkcji wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $B = (0, -2)$. Rozwiąż nierówność $w(x) \geq 0$.
29. (R) Wiedząc, że $f(x) = x^5 + x^3$ rozwiąż nierówność $f'(2x) + f''(x) \geq 6x$.

6. Wielomiany

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

30. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.a) Liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$.

Pozostałe pierwiastki tego wielomianu to:

(A) 2, 3 (B) 6, 1 (C) $-2, -3$ (D) $-1, 6$.b) Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $x(x+2)(1-x)(3+x) > 0$:(A) $(-3; -2) \cup (0; 1)$ (B) $(-\infty; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; \infty)$ (C) $(-\infty; -3) \cup (-2; 1)$ (D) $(-3; -2) \cup (1; \infty)$.c) Iloczyn niezerowych pierwiastków równania $8x^7 + \frac{1}{2}x^3 = 4x^5$ jest równy:(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) 4.d) Wielomian $w(x) = x^3 + 4x^2 + x$. Wynika stąd, że $w(x)$:

(A) ma pierwiastek będący liczbą całkowitą.

(B) ma pierwiastek będący liczbą niewymierną.

(C) jest podzielny przez wielomian $x + 2 + \sqrt{3}$.(D) jest podzielny przez wielomian $x - 2 - \sqrt{3}$.e) Wielomian $u(x) = (a^2 - 3)x^3 + 3x^2 - (a^2 + \sqrt{3}a)x + 1$ jest równy wielomianowi $w(x) = (a^4 - 9)x^3 + 3x^2 + 1$ dla:(A) $a = -3$ (B) $a = -\sqrt{3}$ (C) $a = \sqrt{3}$ (D) $a = 3$.f) Wielomian $w(x) = (2x + 3)^3 - (x - 5)(x + 5)$ przedstawiony w postaci sumy algebraicznej przyjmuje postać:(A) $w(x) = 8x^3 - x^2 + 2$ (B) $w(x) = 8x^3 - x^2 + 52$ (C) $w(x) = 8x^3 + 35x^2 + 54x + 52$ (D) $w(x) = 8x^3 + 35x^2 + 54x + 2$