1. a) **Podaj** pięć wyrazów ciągu:

$$a_n = \sqrt{n^2+n}, \qquad b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 2, & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}.$$

b) **Które** z wyrazów ciągu $b_n = (n^2-1)(n^2-5n+6)$ są równe zero?

c) Dany jest ciąg $a_n = n^2 - 6n$. **Które** wyrazy ciągu są mniejsze od 10?

d) **Zbadaj** monotoniczność ciągu $a_n = 2n^2 - 3n + 1$.

2. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** odpowiedź **A**, **B** albo **C** oraz jej uzasadnienie **1.**, **2.** albo **3.**

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest

A.	rosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	**1.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą ujemną.
B.	malejący,		**2.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zeru.
C.	stały,		**3.**	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą dodatnią.

2. A) Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+2}{3n+1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. **Wyznacz** wszystkie wyrazy tego ciągu większe od $\frac{1}{2}$.

2. B) Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. **Oblicz** a_2, a_4 i a_5.

3. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \quad \text{dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1 \end{cases}.$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n).

4. **Wykaż**, że $n^2 + 2n^2 + 3n^2 + 4n^2 + \cdots + n^3 = \frac{n^3(n+1)}{2}$.

5. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geq 1$. **Wykaż**, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

6. **Sprawdź**, czy dany ciąg jest:

a) arytmetyczny: $a_n = \frac{n}{n+1}$,

b) geometryczny, gdy $b_n = (a_n)^2$ i $a_n = 3 \cdot 2^n$ oraz czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

7. Dane są liczby $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$, $c = 4\sqrt{2}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. **Wybierz** odpowiedź **A**, **B** oraz jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.**, **3.**

Liczby a, b oraz c tworzą w podanej kolejności

A.	ciąg arytmetyczny,	ponieważ	**1.**	$b = \frac{a+c}{2}$
B.	ciąg geometryczny,		**2.**	$b = \frac{(c-a)^2}{2}$
			3.	$b^2 = a \cdot c$

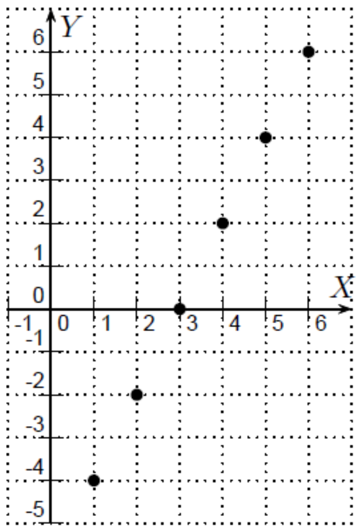
7. A) Na rysunku przedstawiono część wykresu pewnego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).

a) Na podstawie wykresu tego ciągu **odczytaj** jego pierwszy wyraz i różnicę.

b) **Podaj** wzór na ogólny wyraz tego ciągu.

c) Niech $b_n = -\frac{1}{2}n^2$ będzie wyrazem ogólnym ciągu (b_n).

Dla jakich wartości n, $a_n = b_n$?



8. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4$, $a_6 = 19$. **Wyznacz** wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału (0, 200).

9. Liczby $2, x-3, 8$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. **Oblicz** x.

9. A) Dla ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek $a_4 + a_5 + a_6 = 12$. Wtedy

A. $a_5 = 4$ **B.** $a_5 = 3$ **C.** $a_5 = 6$ **D.** $a_5 = 5$

10. Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. **Oblicz** a_{15}.

11. **Wyznacz** liczbę składników w sumie 2 + 5 + 8 + 11 + ... + 449 i oblicz tę sumę.

12. Pani Joanna postanowiła systematycznie oszczędzać i co miesiąc na swoje subkonto odkładać pewną sumę pieniędzy. Pierwszego czerwca 2020 roku wpłaciła 300 złotych. Pierwszego dnia każdego kolejnego miesiąca wpłacała o 25 zł więcej niż w miesiącu poprzednim.

12.1 **Oblicz** kwotę, jaką pani Joanna wpłaciła na swoje subkonto pierwszego czerwca 2022 roku.

12.2 **Oblicz**, o ile większą kwotę niż w miesiącu poprzednim pani Joanna powinna odkładać, aby pierwszego czerwca 2025 roku (uwzględniając również wpłatę w tym dniu) na subkoncie była kwota 76 860 złotych.

13. **Rozwiąż** równanie $(2x+1)+(2x+4)+(2x+7)+\ldots+(2x+28)=155$, jeśli wiadomo, że składniki po lewej stronie są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

13. A) W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. **Oblicz** różnicę $a_{16} - a_{13}$.

13. B) Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Jego różnica jest równa 4, a suma jego pierwszych pięciu wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy następnych pięciu wyrazów. **Oblicz** pierwszy wyraz tego ciągu.

14. Średni zarobek pięciu pracowników pewnej firmy wyniósł w maju 1560 złotych, a najwyższa pensja wyniosła 1800 złotych.
a) **Oblicz** wysokości pensji tych pracowników w maju jeśli wiadomo, że tworzyły one ciąg arytmetyczny.
b) W czerwcu nie pracował już pracownik, który w maju zarabiał najmniej i wtedy pensje pozostałych czterech wzrosły o jednakową kwotę. **Ile** zarabiał każdy z pozostałych pracowników w czerwcu, jeśli wiadomo, że kwota przeznaczona na wypłatę pensji była w czerwcu taka sama jak w maju?

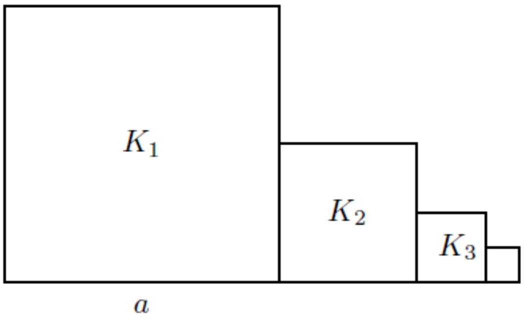
15. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $n \geq 1$. Wiadomo, że dla każdego $n \geq 1$ suma n początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ wyraża się wzorem: $S_n = -n^2 + 13n$.
a) **Wyznacz** wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).
b) **Oblicz** a_{2007}.
c) Wyznacz liczbę n, dla której $a_n = 0$.

16. Dany jest rosnący ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 12$, $a_3 = 27$.
a) **Wyznacz** iloraz tego ciągu.
b) **Zapisz** wzór, na podstawie którego można obliczyć wyraz a_n, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
c) **Oblicz** wyraz a_6.

17. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. **Oblicz** wartość m, dla której liczby $f(m)$, $f(1)$, $f(2)$ są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.

17. A) Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. **Oblicz**, ile płyt stoi na półce górnej, a ile płyt stoi na półce dolnej.

18. Kwadrat K_1 ma bok długości a. Obok niego rysujemy kolejno kwadraty K_2, K_3, K_4, ... takie, że kolejny kwadrat ma bok o połowę mniejszy od boku poprzedniego kwadratu, jak na rysunku. **Wyznacz** pole kwadratu K_{12}.



19. Wiedząc, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, **oblicz** 1 + 3 + 9 + ... + 243.

20. Iloraz skończonego ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{3}$, trzeci wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{9}$, a suma wszystkich wyrazów to $\frac{364}{243}$. **Oblicz**, z ilu wyrazów składa się ten ciąg.

20. A) Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, są dodatnie. Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. **Oblicz** iloraz q tego ciągu należący do przedziału $\langle 2\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\rangle$.

21. Różnica między drugim a pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego wynosi 5, zaś różnica między czwartym, a pierwszym wyrazem tego ciągu wynosi 35. **Wyznacz** pierwszy wyraz tego ciągu i jego iloraz.

21. A) **Wyznacz** pierwsze trzy wyrazy ciągu geometrycznego wiedząc, że są one dodatnie, ich suma jest równa 21 oraz suma ich odwrotności jest równa $\frac{7}{12}$.

22. Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań $\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$. **Wyznacz** liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.

23. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny o sumie 24. Po dodaniu do nich kolejno liczb 4, 10 i 40 otrzymujemy ciąg geometryczny. **Oblicz** te trzy liczby.

23. A) Liczby x, y, z, których suma jest równa 114, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Liczby te są również wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n), gdzie $n \geq 1$, w którym $x = a_1$, $y = a_4$ i $z = a_{25}$. **Oblicz** liczby x, y, z.

23. B) Rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa 10. Wyrazy a_3, a_5, a_{13} tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. **Wyznacz** wór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n).

24. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). **Oblicz** k.

25. Pan Kowalski planując wyjazd na wakacje letnie w następnym roku postanowił założyć lokatę, wpła – cając do banku 2000 zł na okres jednego roku. Ma do wyboru trzy rodzaje lokat:
lokata A – oprocentowanie w stosunku rocznym 5%, kapitalizacja odsetek po roku,
lokata B – oprocentowanie w stosunku rocznym 4, 8%, kapitalizacja odsetek co pół roku,
lokata C – oprocentowanie w stosunku rocznym 4, 6%, kapitalizacja odsetek co kwartał.
Oceń, wykonując odpowiednie obliczenia, która lokata jest najkorzystniejsza dla Pana Kowalskiego.

25. A) a) Cena płaszcza była 4 razy podwyższana o 5%. Jaka jest obecna cena płaszcza, jeżeli przed pierwszą podwyżką kosztował on 400 zł?
b) Kapitał w wysokości 1000 zł złożono w banku na procent składany. Jaka będzie wielkość kapitału po 6 latach przy oprocentowaniu rocznym wynoszącym 5%.
c) Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał 500 zł złożony na 5 lat, jeżeli roczna stopa wynosi 4%, a odsetki są kapitalizowane co pół roku.
d) Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi 4, 5% w skali roku, wpłacono 5000 zł. **Oblicz** stan tej lokaty po dwóch latach oszczędzania, jeżeli od naliczanych odsetek będzie pobierany co roku podatek w wysokości 20%.

Poziom rozszerzony

26. (R) Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Ponadto ciąg $(a + 100, b, c)$ jest geometryczny. **Oblicz** wyrazy ciągu (a, b, c, d).

27. (R) Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Ciąg $(a_1 \cdot a_2,\ a_2 \cdot a_3,\ a_3 \cdot a_1)$ jest geometryczny i ma wyrazy różne od zera. **Oblicz** iloraz tego ciągu geometrycznego.

28. (R) **Oblicz** granicę ciągu:
a) $a_n = \frac{-4n^2+3n+1}{2+n+2n^2}$,
b) $b_n = \frac{10n^2-2}{2-n+n^3}$,
c) $c_n = \frac{6n^4+n^2-5}{2-n^3}$,
d) $d_n = 8 + 2n^3 - 4n^5$,
e) $e_n = 3 \cdot 4^n - 5^{n+1}$,
f) $f_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n-4}$,
g) $g_n = \sqrt[3]{\frac{n^3+2}{8n^3+n}}$,
h) $h_n = \frac{3(n+2)!-n!}{(n+2)!+n!}$.

29. (R) **Oblicz** granicę:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$,

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2-(1-2n)^2}{(2n-1)^2}$,

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{5+7+9+\cdots+(2n+3)}$,

d) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6^n+7^n}$.

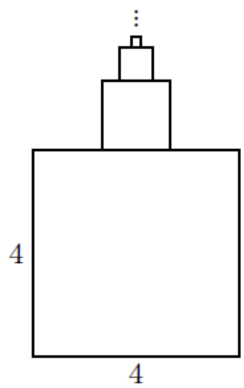
29. A) (R) Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n=(n+5)^2\cdot\left(\frac{p+1}{(n+1)(n+2)}+\frac{2p+2}{(n+2)(n+3)}\right)$ dla $n\geq 1$. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których granica ciągu jest równa 12.

30. (R) Dla jakich wartości x szereg geometryczny $1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{9x^2}+\frac{1}{27x^3}+\cdots$ jest zbieżny? **Oblicz** sumę.

31. (R) Dany jest ciąg geometryczny(a_n) określony wzorem $a_n=\left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. **Wyznacz** najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1+a_2+a_3+\cdots$ jest zbieżny.

32. (R) W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n\geq 1$, jest spełniony warunek $\frac{a_5+a_3}{a_3}=\frac{29}{25}$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6. **Wyznacz** wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

32. A) (R) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 7, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8. **Wyznacz** wszystkie wartości n, dla których spełniona jest nierówność $\left|\frac{S-S_n}{S_n}\right|<0{,}001$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n). **Zapisz** obliczenia.



33. (R) Górną podstawę kwadratu o boku długości 4 podzielono na trzy równe części i skonstruowano kwadrat, następnie górną podstawę kwadratu górnego podzielono na trzy równe części i znów skonstruowano kolejny kwadrat, itd.
a) **Oblicz** sumę obwodów wszystkich kwadratów.
b) **Oblicz** sumę pól wszystkich kwadratów.

34. (R) **Rozwiąż** równanie $x^2+x^3+x^4+\cdots=1\frac{1}{3}$, którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

35. (R) Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$ jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3. **Oblicz** iloraz ciągu (a_n).