

1. **Podaj** dziedzinę funkcji i sprowadź ją do najprostszej postaci:

a)  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^4 - 16}$ ,

b)  $f(x) = \frac{(x^3 - 1)(x^2 - 4)}{(x^2 + x - 2)(x - 2)}$ .

1. A) Dane są wyrażenia  $u = \frac{3x^2 + 12x}{(x-1)(x+4)}$  i  $w = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ .

a) **Wyznacz** dziedzinę każdego z nich.

b) **Skróć** ułamki  $u$  i  $w$ .

c) **Zapisz**  $u + w$  w postaci ułamka i podaj jego dziedzinę.

2. Dane jest wyrażenie  $w(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right)$ .

**Oceń** prawdziwość poniższych zdań. **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $w(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ .	<b>P</b>	<b>F</b>
2.	Wyrażenie $w(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{2x}{x^2 - 1}$ .	<b>P</b>	<b>F</b>

3. **Wykonaj** działania, **określ** dziedzinę:

a)  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 8} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1}$ ,

b)  $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+x}{3x-3}$ ,

c)  $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$ ,

d)  $\left( x - \frac{x-2}{1+2x} \right) : \left( 1 + \frac{x(x-2)}{1+2x} \right)$ ,

e)  $\left( \frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y} \right) \cdot \frac{x^2+xy}{x^2y^2}$ .

4. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscami zerowymi funkcji  $f(x) = \frac{x^3 - 13x + 12}{x+4}$  są liczby

**A.**  $-4, 1, 3$ .

**B.**  $-3, 1, 4$ .

**C.**  $3, 1$ .

**D.**  $-4$ .

5. Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy  $\frac{4}{7}$ , a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy  $\frac{1}{2}$ . **Wyznacz** ten ułamek.

6. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie  $\frac{x^2+2x}{x^2-4} = 0$

**A.** ma trzy rozwiązania:  $x = -2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

**B.** ma dwa rozwiązania:  $x = 0$ ,  $x = -2$ .

## 8. Funkcje wymierne

mgr M. Kucharska, mgr A. Piłat

C. ma dwa rozwiązania:  $x = -2$ ,  $x = 2$ .

D. ma jedno rozwiązanie:  $x = 0$ .

7. **Rozwiąż** równanie:

a)  $\frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x-1}$ ,

b)  $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$ ,

c)  $\frac{(4x-1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0$ ,

d)  $x + \frac{3}{x-3} = \frac{2x+3}{3-x}$ ,

e)  $\frac{x-2}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x^2-4x}$ .

7. A) **Rozwiąż** równanie:

a)  $x + 1 = \frac{2}{x}$ ,

d)  $\frac{x+2}{x} + \frac{x}{x+2} = 2$ ,

b)  $\frac{2x-3}{x-3} = 3$ ,

e)  $1 + \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2}{x^2-4}$ .

c)  $\frac{3x+2}{3x-2} = 4 - x$ ,

8. Która z podanych równości (A–D) jest prawdziwa? **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

**Przesuwając** wykres funkcji  $f(x) = \frac{-2}{x}$  równoległe do osi  $OX$  w prawo o 5 jednostek oraz równoległe do osi  $OY$  w dół o 3 jednostki, otrzymasz wykres funkcji:

A.  $g(x) = \frac{-2}{x+3} + 5$ ,

B.  $g(x) = \frac{-2}{x-5} - 3$ ,

C.  $g(x) = \frac{-2}{x+5} + 3$

D.  $g(x) = \frac{-2}{x-5} + 3$ .

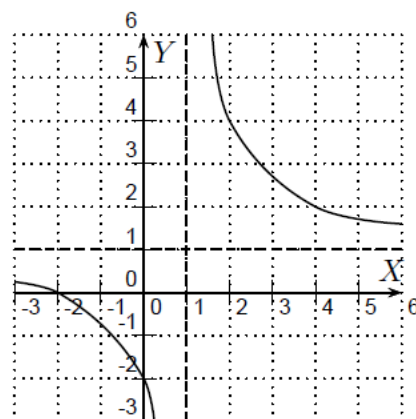
9. **Naszkicuj** wykres funkcji  $f(x) = \frac{2}{3x-6}$ , **wyznacz** jej dziedzinę, zbiór wartości, podaj równania asymptot, **oblicz** miejsca zerowe, **określ** argument, dla którego funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, **podaj** przedziały monotoniczności.

10. Odległość między dwiema przystaniami położonymi na rzece wynosi 8 km. Łódka przepływa tę drogę w obie strony w czasie 1 h i 40 minut. **Oblicz** prędkość łódki na wodzie stojącej, jeśli wiadomo, że prędkość prądu rzeki wynosi 2 [km/h]

### Poziom rozszerzony

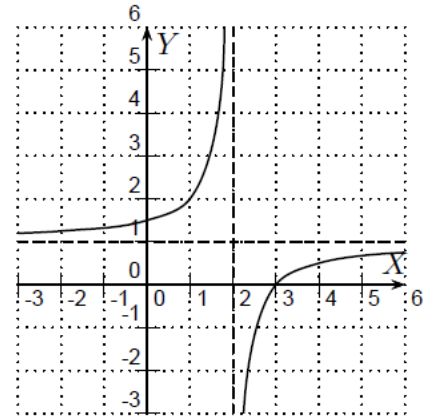
11. (R) W oparciu o wykres funkcji wymiernej określonej

wzorem  $f(x) = \frac{ax+2}{bx+c}$ , **wyznacz** wartości  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .



## 8. Funkcje wymierne

mgr M. Kucharska, mgr A. Piłat



11. A) (R) Asymptotą pionową wykresu funkcji  $f$  o wzorze  $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ , jest prosta o równaniu  $x = 2$ , a asymptotą poziomą prosta  $y = 1$  (zobacz rysunek). **Wyznacz** wzór funkcji  $f$ .
12. (R) **Sporządź** wykres funkcji  $f(x) = \frac{-3x-6}{x+3}$ .
13. (R) Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{-3x+41}{x-13}$  dla  $x \neq 13$ . Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi. **Wyznacz** wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji  $f$ .
13. A) (R) Punkt  $A = (-5, 3)$  jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem  $f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$ , gdy  $x \neq -d$ . **Oblicz** iloraz  $\frac{d}{a}$ .
14. (R) Iloczyn liczb  $x$  i  $y$  jest równy połowie ich sumy. **Wyznacz** liczbę  $y$  jako funkcję liczby  $x$  dla  $x \neq \frac{1}{2}$ .
14. A) (R) Dane jest równanie  $-x + xy - y - 3 = 0$ . **Wyznacz**  $y$  w zależności od  $x$ . **Ustal** warunki istnienia takiej zależności oraz  $x$ , dla którego  $y$  przyjmuje wartość 5.
14. B) (R) Dany jest trójmian kwadratowy  $w$  określony dla  $x \in R$  wzorem  $w(x) = (m - 4)x^2 + (m + 2)x + m + 2$ . Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej wartości rzeczywistej  $m$  iloczyn różnych pierwiastków rzeczywistych równania kwadratowego  $w(x) = 0$ . **Narysuj** wykres funkcji  $f$ .
15. (R) **Narysuj** wykres funkcji  $f(x) = \frac{|x^2-4|}{2-|x|}$ , a następnie **określ**, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $f(x) = m$  nie ma rozwiązania.
16. (R) **Sporządź** wykres funkcji  $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$ , a następnie korzystając z tego wykresu, **wyznacz** wszystkie wartości parametru  $k$ , dla których równanie  $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$ , ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
16. A) (R) Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu równym 6, których dwa sąsiednie boki zawarte są w osiach  $OX$  i  $OY$  układu współrzędnych. **Wyznacz** równanie krzywej będącej zbiorem tych wierzchołków rozpatrywanych prostokątów, które nie leżą na żadnej z osi układu współrzędnych. **Narysuj** tę krzywą.

17. (R) **Rozwiąż** nierówność:

a)  $\frac{3}{x-2} \leq \frac{2}{x+3}$ ,

b)  $\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$ ,

c)  $x \geq \frac{x+1}{1-x}$ ,

d)  $\frac{2x-5}{3-4x} > 1$ ,

e)  $\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-5)^2(x+1)} \leq 0$ ,

f)  $\frac{x^3-x+6}{x^2} \geq 0$ ,

g)  $x + 4 + \frac{8}{x-4} \geq \frac{-2x-8}{x^2-16}$ .

18. (R) **Wyznacz** dziedzinę funkcji  $f$  określonej wzorem:  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+4}}$ .

19. (R) Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x \neq -1$ .

**Rozwiąż** nierówność  $f(x) > f(2-x)$ .

20. (R) Przedział  $(-\frac{3}{2}; 0)$  jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności  $\frac{2}{x} < m$  z niewiadomą  $x$ .

**Oblicz**  $m$ .

21. (R) **Rozwiąż** równanie:

a)  $\left| \frac{3}{|x+2|} - 1 \right| = 8$ ,

b)  $\left| \frac{6x-3}{2x+1} \right| = 3$ .

22. (R) **Rozwiąż** nierówność:

a)  $\frac{1}{|4-3x|} > 2$ ,

b)  $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| < 3$ ,

c)  $\left| \frac{1}{|x|} \right| < 1$ .

22. A) (R) Funkcja homograficzna  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$ , gdzie  $p \in R$  jest parametrem

i  $|p| \neq \sqrt{3}$ .

a) Dla  $p = 1$  **zapisz** wzór funkcji w postaci  $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$ , gdzie  $k$  oraz  $m$  są liczbami rzeczywistymi.

b) **Wyznacz** wszystkie wartości parametru  $p$ , dla których w przedziale  $(p; +\infty)$  funkcja  $f$  jest malejąca.