1. W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dany jest kwadrat $ABCD$. Wierzchołki $A = (-2, 1)$ i $C = (4, 5)$ są końcami przekątnej tego kwadratu.

   **Dokończ zdanie. Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

   Długość przekątnej kwadratu $ABCD$ jest równa

   **A.** $10$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $8$

2. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x,\ y)$, rozważamy dwie proste o równaniach

$$y = a + bx \text{ oraz } y = -\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2x, \text{ gdzie } a \neq 0,\ b \neq 0.$$

   **Dokończ** zdanie tak, aby było prawdziwe. **Wybierz** odpowiedź **A** albo **B** oraz jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

   Dla $a = 2$ i $b = -\frac{3}{2}$ rozważane proste są

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A.** | prostopadłe, | ponieważ | **1.** | $a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1.$ |
| **B.** | równoległe, | | **2.** | $(a+b)\left(-\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2\right) = -1$ |
| | | | **3.** | $b = -\frac{2}{3}b^2$ |

3. **Wyznacz** równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2, 2)$ i $B = (2, 10)$.

4. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dany jest trójkąt $ABC$. Wierzchołki tego trójkąta mają współrzędne: $A = (-15, -8)$, $B = (-6, 4)$, $C = (-19, -5)$.

   4.1. **Wykaż**, że trójkąt $ABC$ jest prostokątny. **Zapisz** obliczenia.

   4.2. Wierzchołki trójkąta $ABC$ są trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Odcinek $AC$ jest przekątną tego równoległoboku. **Oblicz** współrzędne wierzchołka $D$. **Zapisz** obliczenia.

   4.3. **Uzupełnij** zdanie. **Wpisz** odpowiednie liczby w wyznaczonych miejscach, aby zdanie było prawdziwe. Punkt $S$ przecięcia środkowych trójkąta $ABC$ ma współrzędne: $S$ = (….… , …...).

5. **Wyznacz** równanie prostej zawierającej środkową $CD$ trójkąta $ABC$, którego wierzchołkami są punkty: $A = (-2, -1)$, $B = (6, 1)$ i $C = (7, 10)$.

6. Dane są wierzchołki trójkąta $ABC$: $A = (2, 2)$, $B = (9, 5)$ i $C = (3, 9)$. Z wierzchołka $C$ poprowadzono wysokość tego trójkąta, która przecina bok $AB$ w punkcie $D$. **Wyznacz** równanie prostej przechodzącej przez punkt $D$ i równoległej do boku $BC$.

6. A) Punkty $A = (-1, 1)$ i $C = (1, 9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego $ABC$, w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa $AB$ tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. **Oblicz** współrzędne wierzchołka $B$ tego trójkąta.

7. **Oblicz** pole kwadratu, którego jednym z wierzchołków jest punkt $A = (1, -3)$ i którego przekątna zawiera się w prostej o równaniu $y = 2x$.

7. A) Punkty $M = (3, 1)$, $N = (6, 5)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu $KLMN$. Stosunek długości tych podstaw jest równy $1: 2$. Dłuższa podstawa zawiera się w prostej o równaniu $4x - 3y - 8 = 0$. **Oblicz** pole trapezu.

8. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dany jest trójkąt $ABC$. Podstawa $AB$ tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 6$. Wierzchołki $A$ i $B$ leżą – odpowiednio – na osi $Oy$ oraz $Ox$. Wierzchołek $C$ ma współrzędne $(3, 7)$. **Oblicz** pole trójkąta $ABC$. **Zapisz** obliczenia.

8. A) Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 82,5. Przekątna $BD$ tego rombu zawiera się w prostej $l$ o równaniu $2x - y - 5 = 0$. **Wyznacz** współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

9. **Napisz** równanie okręgu:
   a) o środku $S = (-1, -2)$ przechodzącego przez punkt $P = (0, 3)$,
   b) o promieniu $r = 4$ stycznego do obu osi układu współrzędnych,
   c) przechodzącego przez punkty $A = (5, 1)$ i $B = (2, -2)$, którego środek leży na prostej $y = 1$.

10. W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ punkty $A = (-8, 12)$ i $B = (-2, 4)$ są końcami cięciwy okręgu $\mathcal{O}$. Środek tego okręgu leży na prostej $k$ o równaniu $y = 4x + 2$. **Wyznacz** współrzędne środka okręgu $\mathcal{O}$ i promień tego okręgu. **Zapisz** obliczenia.

11. Dane są okręgi: $\mathcal{O}_1$ o równaniu $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 20$ oraz $\mathcal{O}_2$ o równaniu $x^2 + (y - 1)^2 = r^2$, gdzie $r \in (0, +\infty)$.
    **Dokończ** zdania. **Zaznacz** odpowiedź spośród **A-D** oraz odpowiedź spośród **E-H**.
    Okręgi $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ są styczne zewnętrznie dla

    **A.** $r = \sqrt{2}$ **B.** $r = \sqrt{3}$ **C.** $r = 2$ **D.** $r = \sqrt{5}$

    Okrąg $\mathcal{O}_2$ przechodzi przez środek okręgu $\mathcal{O}_1$ dla

    **E.** $r = 2\sqrt{5}$ **F.** $r = 6$ **G.** $r = 3\sqrt{5}$ **H.** $r = 4\sqrt{5}$

12. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dane są: okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S = (3, -4)$ i prosta $k$ o równaniu $2x - y - 11 = 0$. Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej $k$ w punkcie $P$.

    12.1. **Wyznacz** i **zapisz** równanie okręgu $\mathcal{O}$.

    12.2. **Oblicz** współrzędne punktu $P$, w którym okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej $k$.

12. A) Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dany jest okrąg $O$ określony równaniem: $(x-2)^2+(y+3)^2=16$.

12.1. **Dokończ** zdania**. Zaznacz** odpowiedź spośród **A–D** oraz odpowiedź spośród **E–G.**

Środek $S$ okręgu $O$ ma współrzędne

**A.** $S=(2,-3)$ **B.** $S=(-2,-3)$ **C.** $S=(-2,3)$ **D.** $S=(2,3)$

Promień $r$ okręgu $O$ jest równy

**E.** $r=16$ **F.** $r=4$ **G.** $r=5$

12.2. **Oblicz** współrzędne $x$ punktów przecięcia okręgu $O$ z osią $Ox$.

13. W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ dany jest okrąg $O$ o równaniu $x^2+y^2=2$ oraz prosta $k$ o równaniu $y=m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

**Uzupełnij** zdanie. **Wpisz** odpowiedni przedział w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Okrąg $O$ i prosta $k$ mają dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy $m \in$ ...................... .

14. Okrąg o środku w punkcie $S=(3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y=2x-3$. **Oblicz** współrzędne punktu styczności.

14. A) Funkcja kwadratowa $f$ określona jest wzorem $f(x)=-x^2+2x+3$. Funkcja liniowa $g$ określona jest wzorem $g(x)=-x+5$. **Oblicz** współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji $y=f(x)$ oraz funkcji $y=g(x)$. **Zapisz** obliczenia.

15. a) **Wyznacz** współrzędne punktów wspólnych prostej $y=2x+1$ oraz hiperboli $y=\frac{1}{x}$ . **Wykonaj** ilustrację graficzną.

b) **Wyznacz** współrzędne punktów wspólnych prostej $-x+y-2=0$ oraz okręgu $(x+3)^2+(y-2)^2=9$. **Wykonaj** interpretację graficzną.

15. A) **Rozwiąż** układ równań $\begin{cases} x^2+y^2-4x+4y-17=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$. **Zapisz** obliczenia.

16. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$, dane są punkty $A=(1,2)$ oraz $B=(3,7)$. Punkty $A_O$ oraz $B_O$ są odpowiednio obrazami punktów $A$ i $B$ w symetrii środkowej o środku w punkcie $O=(0,0)$.

**Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A_O$ i $B_O$ jest równy

**A.** $\frac{5}{2}$ **B.** $-\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $-\frac{2}{5}$

**Poziom rozszerzony**

17. (R) Niech $A = (1, 3)$, $B = (5, 1)$ oraz $C = (4, 3)$. **Wyznacz** współrzędne punktu $M$ tak, aby $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{BC}$. **Oblicz** długość wektora $\overrightarrow{AM}$ i współrzędne jego środka.

18. (R) Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach $y = x + b$, $y = x + 2b$, $y = b$, $y = 2$, gdzie liczba rzeczywista $b$ spełnia warunki: $b \neq 2$ i $b \neq 0$. **Wyznacz** wszystkie wartości parametru $b$, dla których pole tego równoległoboku jest równe 1.

19. (R) Prosta $k$ o równaniu $x + y - 9 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ w punktach $A$ oraz $B$. Pierwsza współrzędna punktu $A$ jest liczbą dodatnią; pierwsza współrzędna punktu $B$ jest liczbą ujemną. Prosta $l$ jest równoległa do prostej $k$ i styczna do danej paraboli w punkcie $C$. **Oblicz** odległość punktu $C$ od prostej $k$ oraz pole trójkąta $ABC$. **Zapisz** obliczenia.

19. A) (R) **Wyznacz** równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5,\ 3)$ i $B = (0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.

20. (R) **Wyznacz** równania prostych stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ i zarazem prostopadłych do prostej $x + 2y - 6 = 0$.

20. (A) R) W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ punkt $A = (9, 12)$ jest wierzchołkiem trójkąta $ABC$. Prosta $k$ o równaniu $y = \frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta $ABC$ tego trójkąta. Okrąg $O$ o równaniu $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ jest wpisany w ten trójkąt. **Oblicz** współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki $B$ i $C$ tego trójkąta z okręgiem $O$. **Zapisz** obliczenia.

21. (R) Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0$. Wierzchołek $A$ trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek $AB$ jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna $AC$ trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$. **Oblicz** sinus kąta $ABC$.

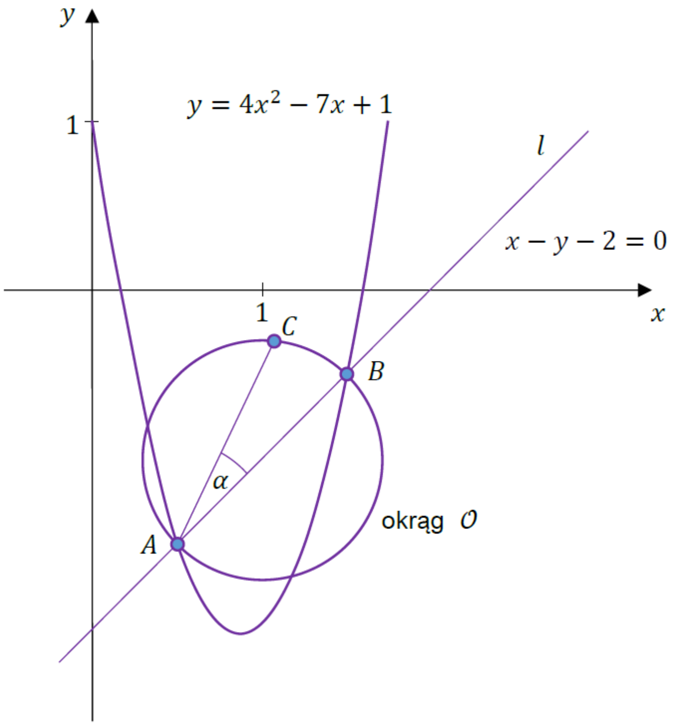
22. (R) Dane są okręgi o równaniach

$$x^2 + y^2 - 12xy - 8y + 43 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0.$$

**Wyznacz** wszystkie wartości parametru $a$, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. **Rozważ** wszystkie przypadki.

22. A) (R) **Wyznacz** promień okręgu o środku w początku układu współrzędnych stycznego zewnętrznie do okręgu $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$.

23. (R) W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x, y)$ prosta $l$ o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach $A$ oraz $B$. Odcinek $AB$ jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Punkt $C$ leży na okręgu $\mathcal{O}$ nad prostą $l$, a kąt $BAC$ jest ostry i ma miarę $\alpha$ taką, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).




**Oblicz** współrzędne punktu $\boldsymbol{C}$. **Zapisz** obliczenia.

24. (R) Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego $ABC$, w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka $C$ są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. **Oblicz** współrzędne wierzchołków $B$ i $C$ tego trójkąta.

24. A) (R) **Rozwiąż** układ równań $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 24 \\ x^2 - 10x + y^2 - 8y + 40 = 0 \end{cases}$. **Zapisz** obliczenia.

25. (R) Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{BD} = [-21, -7]$ i $\overrightarrow{DC} = [15, 8]$. **Oblicz** pole tego równoległoboku.

26. (R) **Rozwiąż** graficznie układy nierówności:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y > 1 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} xy \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq x^2 - 2 \end{cases}$.

26. A) (R) Za pomocą układu nierówności **opisz** zacieniowany na rysunku zbiór punktów.