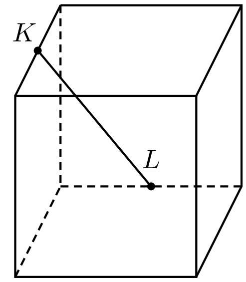
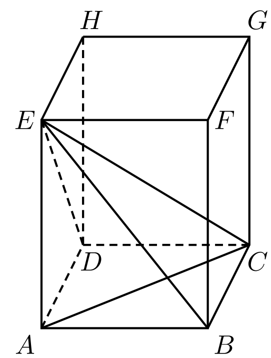


1. Oblicz długość odcinka KL łączącego środki dwóch krawędzi sześcianu, którego krawędź ma długość 6.

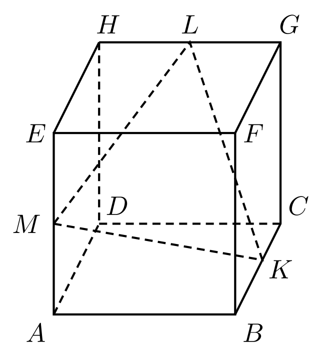
2. Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.

3. Przekątna d prostopadłościanu o podstwie kwadratowej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Krawędź podstawy ma długość 4.
   a) Wyznacz długość przekątnej d.
   b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
   c) Zaznacz na rysunku kąt nachylenia przekątnej d do ściany bocznej prostopadłościanu.



4. W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości m jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wiadomo, że $\sin\alpha = 0,2$. Wyznacz pole całkowite i objętość tego graniastosłupa.

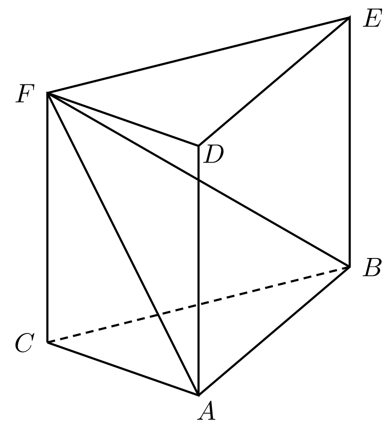
5. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4, a miara kąta $|\angle ACE| = 60°$. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na rysunku.



6. Punkty K, L i M są środkami krawędzi BC, GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta KLM.

7. W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin\alpha = 0,2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

8. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 8 cm i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma wspólny wierzchołek kąt, którego cosinus jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



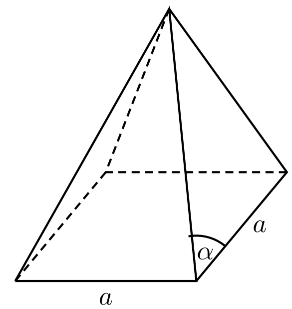
9. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 8, a pole trójkąta ABF jest równe 52. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

10. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa wiedząc, że ma on 18 krawędzi i każda z nich jest równa 4cm.

11. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o podstawach ABC i $A'B'C'$ oraz krawędziach bocznych AA', BB', CC'. Kąt między przekątną ściany bocznej AC' a krawędzią podstawy AC ma miarę α. Promień okręgu wpisanego w podstawę graniastosłupa ma długość r. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

12. W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

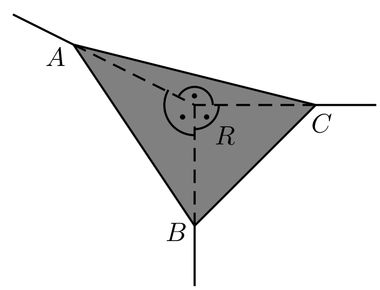
13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy ma miarę $\alpha > 45°$ (zobacz rysunek). Wyznacz objętość tego ostrosłupa.



14. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokatnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

15. Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 17 cm. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 18 cm i 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

16. Narożnik między dwiema ścianami i sufitem prostopadłościennego pokoju należy zamaskować trójkątnym fragmentem płyty gipsowo-kartonowej (patrz rysunek). Wiedząc, że $|RA| = |RB| = |RC| = 1$ m, oblicz objętość narożnika zamaskowanego tą płytą. Wynik zaokrąglij do $0,01$ m^3.



17. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej ma długość $4\sqrt{3}$, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod katem $60°$. Oblicz objętość ostrosłupa.

18. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC. Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.

19. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna o długości k tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze $45°$. Oblicz objętość ostrosłupa.

20. Wykaż, że jeśli wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego stanowi 150% długości krawędzi podstawy, to pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest 4 razy większe od pola podstawy.

21. Prostokąt $ABCD$ obracając się wokół boku AB, zakreślił walec w_1. Ten sam prostokąt obracając się wokół boku AD, zakreślił walec w_2. Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.

22. Piętrowy tort przygotowany na bal maturalny składał się z pięciu warstw, z których każda miała kształt walca. Długości promieni walców, wyrażone w cm były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $a = -5$. Długość promienia podstawy środkowej warstwy tego tortu była równa 20 cm, a jej objętość 3200π cm^3. Wszystkie warstwy wykonane były z tego samego rodzaju ciasta i miały jednakową wysokość. Oblicz, ile mąki należało przygotować do wypieku całego tortu, jeżeli receptura przewiduje wykorzystanie $0,24$ kg mąki do wypieku warstwy środkowej.

23. Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie $240°$ i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka.

24. Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$, przetopiono na 6 jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.

25. Kąt rozwarcia stożka jest równy $60°$. Promień podstawy stożka ma długość 4. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

26. Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.

27. Metalową kulę o promieniu 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość wynoszą odpowiednio 16 cm i 12 cm przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. Oblicz wysokość walca.

28. Metalową kulę o promieniu $R = 5$ cm w całości przetopiono na kuleczki o promieniu $r = 0,25$ cm. Ile uzyskano w ten sposób kuleczek?

29. **a)** Dane są dwie kule. Objętość pierwszej kuli jest równa 36π cm^3, a druga kula ma promień dwa razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. Podaj objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?
b) Po dopompowaniu powierzchnia kulistego balonu zwiększyła się o 44%. O ile wzrosła objętość balonu?

30. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a)Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa
(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 24 **(D)** 64.

b) Jeżeli ostrosłup ma 10 krawędzi, to liczba ścian bocznych jest równa
(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 10.

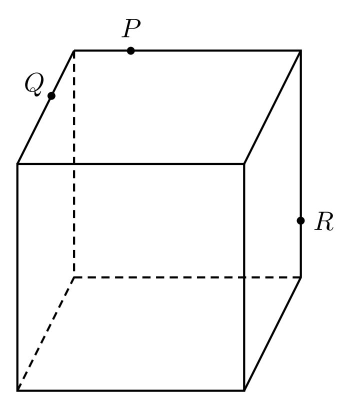
c) Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 10 większa od liczby wszystkich jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest
(A) czworokąt **(B)** pięciokąt **(C)** sześciokąt **(D)** dziesięciokąt.

d) Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$. Wysokość tego stożka jest równa
(A) $2\sqrt{2}$ **(B)** 16π **(C)** $4\sqrt{2}$ **(D)** 8π.

e) Stożek i walec mają takie same podstawy i równe pola powierzchni bocznych. Wtedy tworząca stożka jest
(A) sześć razy dłuższa od wysokości walca.
(B) trzy razy dłuższa od wysokości walca.
(C) dwa razy dłuższa od wysokości walca.
(D) równa wysokości walca.

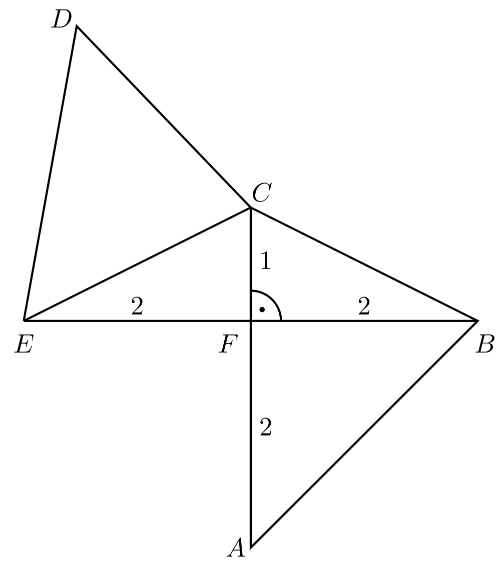
31. (R) **a)** Narysuj przekrój prostopadłościanu płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy.

b) Narysuj przekrój równoległocianu płaszczyzną PQR.



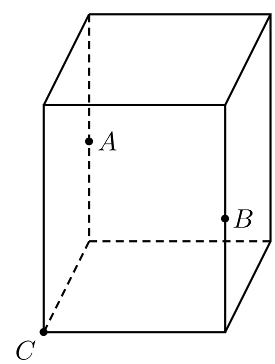
32. (R) Oblicz pole przekroju sześcianu o krawędzi a płaszczyzną zawierającą przekątną jednej ściany i środki dwóch krawędzi przeciwległej ściany.

33. (R) Sześcian o krawędzi długości 2 przecięto płaszczyzną $\mathcal{K}$ zawierającą przekątną podstawy tego sześcianu. Płaszczyzna ta odcieła od sześcianu pewną figurę, której siatkę przedstawiono na rysunku. Wiedząc, że $|AF| = |FB| = |EF| = 2$, $|FC| = 1$ i punkt F jest wierzchołkiem sześcianu, oblicz pole przekroju sześcianu płaszczyzną $\mathcal{K}$.



34. (R) Dany jest szecian $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2 : 1$, to znaczy $|HQ| = |FR| = 10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.

35. (R) Krawędź boczna prostopdałościanu ma długość 5, a krawędzie podstawy mają długość 3. Oblicz pole przekroju prostopadłościanu P, jeżeli punkty A, B są środkami odpowiednich krawędzi (zobacz rysunek) a punkt C jest wierzchołkiem prostopadłościanu.



36. (R) Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi równej 1. Punkt S jest środkiem krawędź DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.

37. (R) Oblicz odległość wierzchołka sześcianu, którego krawędź ma długość a, od tej przekątnej sześcianu, do której ten wierzchołek nie należy.

38. (R) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa). Wykaż, że $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = -1$.

39. (R) Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$. Punkt M jest środkiem boku AB i $|AM| = |MC|$. Odcinek AS jest wysokością tego ostrosłupa. Wykaż, że kąt SCB jest prosty.

40. (R) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

41. (R) Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 4. Odcinek DS jest wysokością ostrosłupa i ma długość 6. Punkt M jest środkiem odcinka DS. Oblicz pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną BCM.

42. (R) Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

43. (R) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

44. (R) Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2 : 1$. Krawędzie boczne BS i DS mają długość równą 1. Oblicz objetość ostrosłupa oraz długość krawędzi AS i CS.

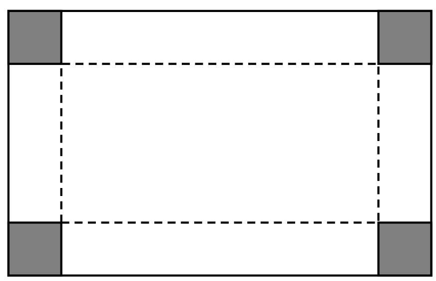
45. (R) W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a. Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległoś wierzchołka A od ściany BCS jest równa d. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

46. (R) **a)** W kulę o promieniu 8 cm wpisano walec o promieniu podstawy 4cm. Oblicz objętość walca.

    b) Na sześcianie o krawędzi długości a opisano kulę w ten sposób, że wierzchołki sześcianu należą do powierzchni kuli. Oblicz objętość kuli.

    c) W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano kulę o promieniu 2. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do jego podstawy pod kątem $60°$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

47. (R) Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż lini przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę objętość.

48. (R) Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

49. (R) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość równą $2\sqrt{3}$. Jaką największą objętość może mieć ten walec?

50. (R) Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 16 cm obraca się dookoła podstawy. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość otrzymanej bryły bedzie maksymalna?

51. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Przekrojem sześcianu może być:
(A) trójkąt równoboczny. **(B)** kwadrat.
(C) pięciokąt foremny. **(D)** sześciokąt foremny.

b) Wysokość ściany bocznej w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ma długość h i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$.Wówczas:
(A) krawędź podstawy ostrosłupa ma długość $h\sqrt{2}$.
(B) krawędź podstawy ostrosłupa ma długość $2h\sqrt{3}$.

(C) objetość ostrosłupa wynosi $3h^3\sqrt{3}$.
(D) żadana z odpowiedzi nie jest prawidłowa.

c) Ostrosłup o objętości V przecięto płaszczyzną równoległą do jego podstawy i dzielącą jego wysokość w stosunku $2:3$ licząc od wierzchołka. Wówczas:
(A) objętości otrzymanych brył pozostają w stosunku $8:27$.
(B) objętości otrzymanych brył pozostają w stosunku $8:117$.
(C) objętość mniejszej z brył wynosi $\frac{2}{3}V$.
(D) objętość mniejszej z brył wynosi $\frac{8}{125}V$.

d) W walec o promienu podstawy długości r i wysokości długości r wpisano graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Wówczas:
(A) objętości graniastosłupa wynosi $3r^3\sqrt{3}$.
(B) stosunek objętości walca do objętości graniastosłupa wynosi $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.
(C) stosunek powierzchni bocznej walca do powierzchni bocznej graniastosłupa wynosi $\frac{2\pi}{3}$.
(D) suma długości wszystkich krawędzi wynosi $18r$.

e) Dana jest kula o promieniu R. Wówczas:
(A) objętości sześcianu wpisanego w tę kulę wynosi $\frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$.
(B) objętości sześcianu wpisanego w tę kulę wynosi $\frac{R^3\sqrt{3}}{9}$.
(C) objętości sześcianu opisanego na tej kuli wynosi $2R^3$.
(D) pole powierzchni sześcianu opisanego na tej kuli wynosi $24R^2$.