

3. Własności funkcji

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

1. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$,

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$,

c) $f(x) = \sqrt{2 - |x|}$,

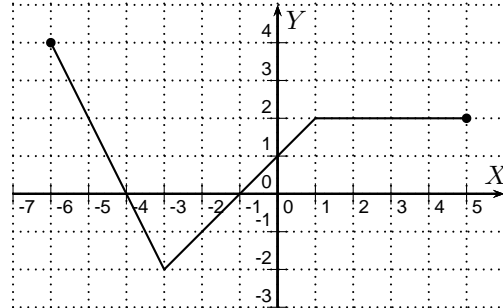
d) $f(x) = \frac{9 - x^2}{3 + x}$ oraz sporządź wykres,

e) $f(x) = \frac{2x^2 + 4}{-x^2 + 4}$.

2. Wyznacz wzór funkcji $g(x) = f(x - 3) - 1$, gdy $f(x) = x^2$ i sporządź jej wykres.

3. Na podstawie wykresu funkcji ustal:

- dziedzinę funkcji i jej zbiór wartości,
- miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności,
- argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.



4. Dana jest funkcja $f(x) = NWD(x, 4)$ dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, gdzie zapis $NWD(x, 4)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb x i 4.

a) Uzupełnij tabelę

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

b) Naskicuj wykres funkcji f .

c) Podaj zbiór wartości funkcji $g(x) = f(x) + 3$.

5. Sprawdź, czy punkt A należy do wykresu funkcji f , gdy

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $A = (\sqrt{3}, \frac{5}{2})$,

b) $f(x) = |\sqrt{2} - x|$, $A = (\sqrt{2} + 1, 1)$,

c) $f(x) = 3^{|x-1|}$, $A = (-2, \frac{1}{27})$,

d) $f(x) = x^{-3}$, $A = (-\frac{1}{2}, -8)$.

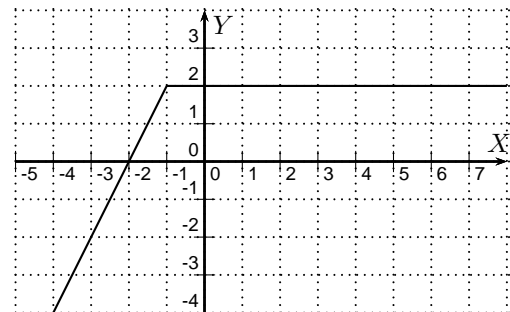
6. Dany jest wykres pewnej funkcji, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Sporządź wykres funkcji:

a) $y = f(x - 2) - 1$,

b) $y = -f(-x)$,

(R) c) $y = |f(x)|$.

Opisz przekształcenia jakie wykonałeś.



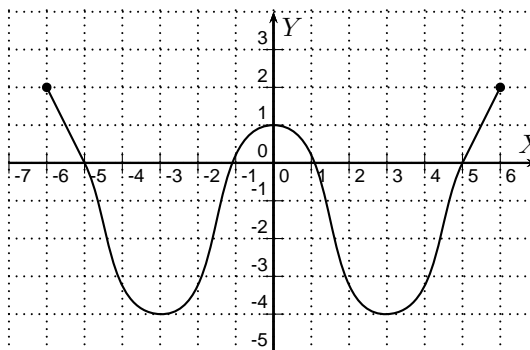
3. Własności funkcji

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

7. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -6, 6 \rangle$.

Korzystając z wykresu funkcji zapisz:

- maksymalne przedziały, w których funkcja jest rosnąca,
- zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -5, 5 \rangle$,
- miejsca zerowe funkcji $g(x) = f(x - 1)$,
- najmniejszą wartość funkcji $h(x) = f(x) + 2$.



8. Test wyboru. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

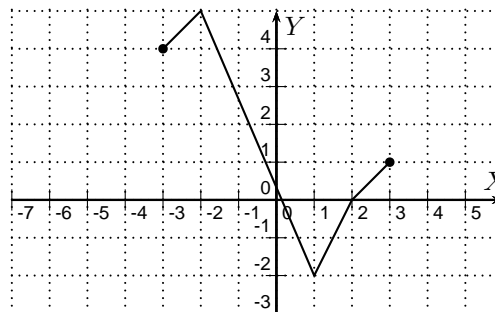
a) Zbiór $\langle 0, \infty \rangle \setminus \{1\}$ jest dziedziną funkcji:

- (A) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1}$, (C) $f(x) = |x| + \frac{1}{x-1}$,
 (B) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$, (D) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \sqrt{x}$.

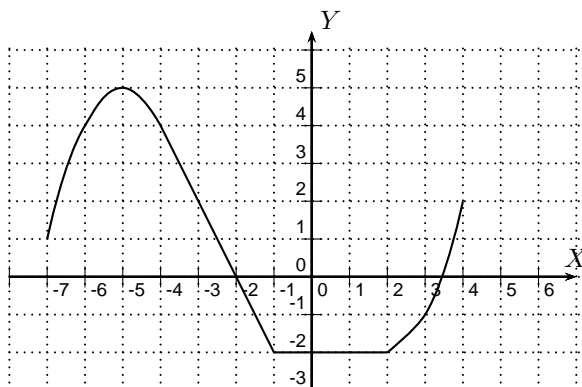
b) Liczba miejsc zerowych funkcji $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{dla } x \in \langle -7, -1 \rangle \\ 4x - 1 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \end{cases}$ jest równa:
 (A) 4, (B) 2, (C) 1, (D) 0.

c) Korzystając z wykresu funkcji f , wskaż nierówność prawdziwą.

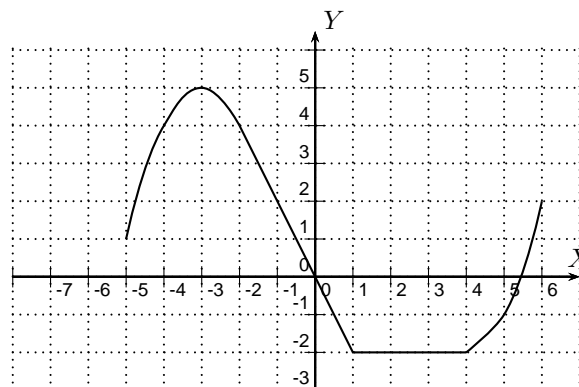
- (A) $f(-1) < f(1)$, (B) $f(1) < f(3)$,
 (C) $f(-1) < f(3)$, (D) $f(3) < f(0)$.



d) Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7, 4 \rangle$.



Rys.1



Rys.2

Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji

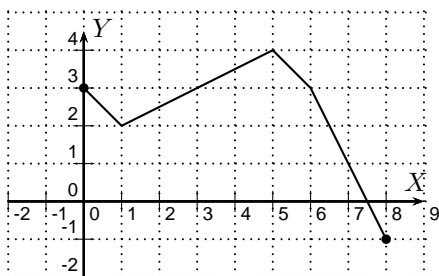
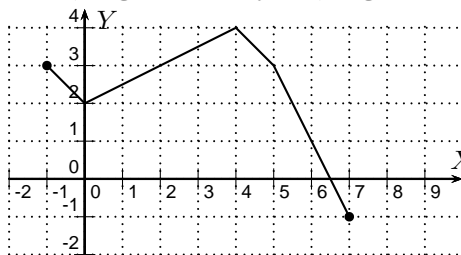
- (A) $y = f(x + 2)$, (B) $y = f(x) - 2$, (C) $y = f(x - 2)$, (D) $y = f(x) + 2$.

3. Własności funkcji

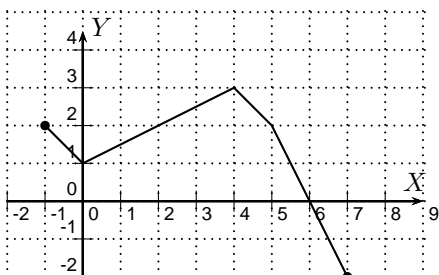
mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

e) Rysunek przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.

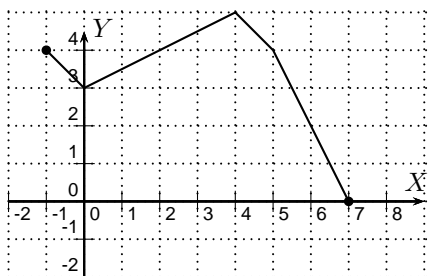
Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x + 1)$.



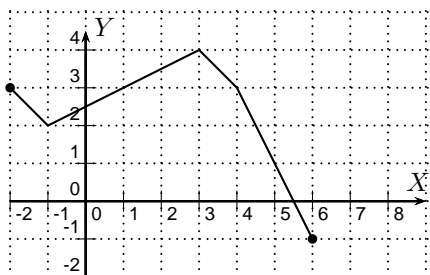
(A)



(C)



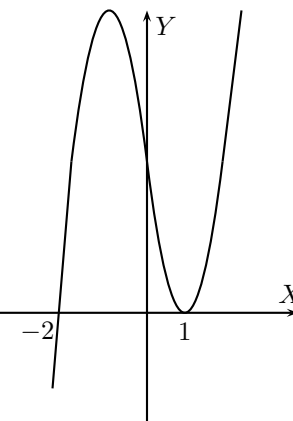
(B)



(D)

9. (R) Znajdź miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{\sin 3x - \sin x}{x}$.
10. (R) Opisz sposób, w jaki należy przekształcić wykres funkcji f aby otrzymać wykres funkcji g , gdy:
- $f(x) = \sin 3x \wedge g(x) = \sin(3x + \pi)$,
 - $f(x) = 2x^2 \wedge g(x) = 2x^2 - 12x + 12$.
11. (R) Funkcja okresowa f ma okres podstawowy 2. Naszkicuj wykres tej funkcji, jeżeli dla $x \in (-2, 0)$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.
12. (R) Wskaż przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x - [x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą z x .
13. (R) Zbadaj parzystość funkcji f .
- $f(x) = x^2 \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$,
 - $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$,
 - $f(x) = \sqrt{x}$,
 - $f(x) = x \log \frac{3-x}{3+x}$,
 - $f(x) = |x| + x$.

14. (R) Rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej w stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1 , a pochodna $w'(-2) = 18$.
- Wyznacz wzór wielomianu w .
 - Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.



3. Własności funkcji

mgr A. Piłat, mgr M. Małycha, mgr M. Kucharska

15. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.a) Do wykresu funkcji $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$ należy punkt:(A) $(-\sqrt{2} + 1, -2)$, (B) $(-\sqrt{2} + 1, 2)$, (C) $(\sqrt{2} - 1, 2)$, (D) $(\sqrt{2} + 1, 2)$.b) Funkcja $f(x) = ||x| - 1|$ określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x jest:(A) rosnąca. (C) rosnąca w $\langle -1, 0 \rangle$ oraz w $\langle 1, \infty \rangle$.(B) malejąca. (D) malejąca w $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.c) Dziedziną funkcji $\frac{\sqrt{8-2^x}}{\log x}$ jest zbiór:(A) liczb rzeczywistych dodatnich. (C) $(0, 3)$.(B) liczb rzeczywistych mniejszych od 3. (D) $(0, 3) \setminus \{1\}$.d) Wykres funkcji $f(x) = (|x| - 4)^2$ ma z prostą $y = m$ dokładnie trzy punkty wspólne, jeśli:(A) $m = 2$, (B) $m = 4$, (C) $m = 8$, (D) $m = 16$.