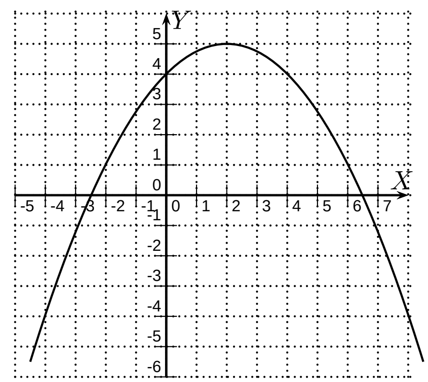
1. Rozwiąż równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.
   a) $-9x^2 + 100 = -5x^2$,
   b) $3x^2 + x = 0$,
   c) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$,
   d) $25(t-1)^2 - 9(t+2)^2 = 0$,
   e) $(y+3)^2 + 25 = 0$,
   f) $k^2 + 1 > 0$,
   g) $7x - 4x^2 - 4 \geqslant 0$,
   h) $4y - y^2 \geqslant 0$,
   i) $-m^2 - 2m + 35 < 0$,
   j) $x^2 - 6x - 7 \leqslant 0$,
   k) $k^2 - 4k + 4 > 0$,
   l) $9u^2 - 6u + 1 \leqslant 0$.

2. Podaj współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f określonej wzorem
   a) $f(x) = \sqrt{2}x^2$,
   b) $f(x) = -4x^2 + 9$,
   c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$,
   d) $f(x) = -4(x - \frac{1}{2})^2 - 3$,
   e) $f(x) = (x-5)(x+3)$,
   f) $f(x) = -x^2 - x + 2$.

3. Sporządź wykres funkcji $f(x) = -(x+3)^2 + 4$ i omów jej własności.

4. Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli spełniony jest warunek:
   a) trójmian osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,
   b) trójmian przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1, 4)$,
   c) wykres trójmianu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.

5. Pewna parabola o wierzchołku $W = (2, 5)$ przecina oś w punkcie $A = (0, 4)$. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola (rys. obok). Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji.



6. Wiedząc, że liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx - 12$, wyznacz współczynnik b oraz drugie miejsce zerowe tej funkcji. Przedstaw wzór funkcji w postaci kanonicznej i iloczynowej.

7. **a)** Wyznacz współczynnik b tak, aby przedział $\langle -8, \infty)$ był zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + bx + 1$.
   b) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (1-x)(x+1) + 2x$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

8. Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

9. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 2x$ w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$.

10. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x z przedziału $\langle -4, -2 \rangle$ połowę kwadratu tej liczby pomniejszoną o 8.
    a) Podaj wzór tej funkcji.
    b) Wyznacz największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

11. Funkcja kwadrtowa f określona wzorem: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma jedno miejsce zerowe oraz do jej wykresu należą punkty $A = (0, 1)$ i $B = (2, 9)$.
    a) Wyznacz wartości współczynników a, b i c.
    b) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.
    c) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

12. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej g jest przedział $(-\infty, 5\rangle$, a zbiorem rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2, 8)$. Wyznacz wzór funkcji g.

13. Dla każdej liczby rzeczywistej b równanie $y = \frac{1}{2}x^2 - bx + 2$ opisuje pewną parabolę. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których wierzchołek paraboli leży nad osią OX.

14. **a)** Jeżeli odejmiemy od danej liczby jej odwrotność, to otrzymamy $\frac{9}{20}$. Jaka to liczba?
b) Znajdź trzy kolejne liczby parzyste tak, aby suma kwadratów dwóch mniejszych liczb była równa kwadratowi trzeciej liczby.
c) Liczbę 42 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, by różnica ich kwadratów była równa 168.

15. Szyba w oknie ma kształt prostokąta o obwodzie $4[m]$. Jakie są jej wymiary, jeśli wiadomo, że jej pole P jest największe z możliwych. Oblicz to pole.

16. Właściciel sklepu kupuje aparaty fotograficzne płacąc producentowi 100 zł za sztukę i sprzedaje 40 aparatów miesięcznie po 160 zł. Właściciel oszacował, że każda obniżka ceny aparatu o 1 zł zwiększa liczbę sprzedanych aparatów o jedną sztukę. Jaką powinien ustalic cenę, aby jego zysk był największy?

17. **a)** Wykaż, że dla $m = 3$ nierówność $x^2 + (2m - 3)x + 2m + 5 > 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x.
b) Wykaż, że jeżeli $x + y = 5$, to $x^2 + y^2 \geqslant \frac{25}{2}$.
c) Wykaż, że jeżeli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geqslant \frac{a+1}{2}$.
d) Udowodnij, że jeśli x, y, z są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y + z = 1$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

18. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Mniejszą z dwóch liczb spełniających równanie $x^2 + 5x + 6 = 0$ jest
(A) -6 **(B)** -3 **(C)** -2 **(D)** -1.

b) Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geqslant 5$ jest
(A) $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}, +\infty\right)$ **(B)** $\left(-\infty, -\sqrt{5}\rangle \cup \langle\sqrt{5}, +\infty\right)$ **(C)** $\langle\sqrt{5}, +\infty\right)$ **(D)** $\langle 5, +\infty\right)$

c) Wskaż równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 4x - 11$.
(A) $x = -4$ **(B)** $x = -2$ **(C)** $x = 2$ **(D)** $x = 4$.

d) Prosta o równaniu $y = a$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x - 10$. Wynika stąd, że
(A) $a = 3$ **(B)** $a = 0$ **(C)** $a = -1$ **(D)** $a = -3$.

e) Wierzchołkiem paraboli o równaniu $f(x) = -3(x - 2)^2 + 4$ jest punkt o współrzędnych
(A) $(-2, 4)$ **(B)** $(-2, 4)$ **(C)** $(2, -4)$ **(D)** $(2, 4)$.

f) Miejscami zerowymi funkcji $y = 4x^2 + bx + c$ są liczby 5 i -3, zatem:
(A) $b = 2$ i $c = -8$, **(B)** $b = -2$ i $c = -15$, **(C)** $b = -8$ i $c = -60$.

g) Równanie $2x^2 + 3x + m = 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylo wtedy, gdy:
(A) $m < \frac{9}{8}$, **(B)** $m \in \left(\frac{9}{8}, \infty\right)$, **(C)** $m > 1,125$.

h) $\mathbb{R}$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:
(A) $5x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$, **(B)** $-4x^2 - 1 < 0$, **(C)** $x^2 + 3 > 0$.

i) Rozwiązaniem nierówności $7x \leqslant x^2$ jest zbiór:
(A) $x \in \left(-\infty, 0\right) \cup \left(7, \infty\right)$ **(B)** $x \in \left\langle 0, 7\right\rangle$ **(C)** $x \in \left\langle 7, \infty\right)$ **(D)** $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle \cup \left\langle 7, \infty\right)$

19. (R) Rozwiąż równanie:
a) $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$,
b) $\sqrt{x - 1} = x - 3$,
c) $|x| + |1 - x^2| = 1$.

20. (R) Rozwiąż nierówności:
a) $5\sqrt{x-3} > x+1$,
b) $(|x|-2)^2 \leqslant 1$,
c) $|x| + |x-2| \geqslant x^2 - 2x + 1$.

21. (R) Sporządź wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości x, dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x, dla których przyjmuje minima lokalne oraz wartość najmniejszą i największą.

22. (R) Dane jest równanie $x^2 + bx + c = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz wartości b oraz c tak, by były one rozwiązaniami danego równania.

23. (R) Równanie $x^2 + 48x + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2. Liczba $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź tę liczbę. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

24. (R) Udowodnij, żę dla każdej liczby rzeczywstej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $20x^2 - 24mx + 18m^2 \geqslant 4x + 12m - 5$.

25. (R) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f określona wzorem $f(x) = (m^2-1)x^2 - 2(1-m)x + 2$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

26. (R) Wyznacz wartości parametru a, dla których równanie $ax^2 - (a+2)x + a + 2 = 0$ ma różne pierwiastki dodatnie.

27. (R) Dane jest równanie $x^2 + (3m-2)x = -m-2$ z niewiadomą x. Sformułuj warunki, jakie powinien spełniać parametr m, by to równanie miało dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest dodatnia.

28. (R) Wyznacz takie wartości parametru m, dla których rozwiązania x_1 i x_2 równania $x^2 + 13x - 24 = (10-m)x - 15$, spełniają warunek
$$x_1^2 + x_2^2 = -3x_1x_2.$$

29. (R) Dane jest równanie $2x^2 - 13x + m = 0$. Wyznacz te wartości parametru m, dla których jeden z pierwiastków jest dwa razy większy od drugiego.

30. (R) Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{C}$, pierwiastki funkcji kwadratowej zadanej wzorem $f(x) = x^2 - 3x + m + 1$ spełniają nierówność:
$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} > 1?$$

31. (R) Dla jakich wartości parametru m równanie $-x^2 + 4x = m$ ma dwa pierwiastki, z których każdy jest większy od 1.

32. (R) **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

a) Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi, ma dwa różne dodatnie miejsca zerowe x_1 i x_2. Wynika stąd, że:
(A) $x_1^2 + x_2^2$ jest liczbą wymierną.
(B) dla $a = 1$ liczba $x_1^3 + x_2^3$ jest naturalna i złożona.
(C) jeśli a, b, c są nieparzyste, to x_1 i x_2 są liczbami całkowitymi.
(D) $x_1 + x_2$ jest liczbą całkowitą.

b) Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^2 - 2x + 3$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Funkcja ta:
(A) ma minimum w punkcie $x = 1$.
(B) ma zbiór wartości będący przedziałem $< 2, \infty)$.
(C) ma miejsca zerowe.
(D) jest niemalejaca w przedziale $(1, \infty)$.

c) Liczba rozwiązań równania $(4-x)(x+6)=a$:
(A) nie zależy od wartości a.
(B) może być nieparzysta dla $a<0$.
(C) równa się 2 dla $a<25$.
(D) jest liczbą całkowitą z przedziału $(-6,4)$.

d) Nierówność $2(x-1)^2 \leqslant x^2-1$:
(A) ma tylko dodatnie rozwiązania.
(B) w zbiorze liczb całkowitych spełniają tylko liczby 1, 2 i 3.
(C) jest równoważna nierówności $|x+2| \leqslant 1$.
(D) ma rozwiazanie równe $2\log_2 3$.

e) Równanie $ax^2+x+a=0$ z parametrem a:
(A) ma jeden pierwiastek, gdy $(2a-1)^2=2-4a$.
(B) dla $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.
(C) ma dwa różne pierwiastki dodatnie dla pewnego $a>0$.
(D) ma jeden pierwiastek tylko dla trzech różnych wartości parametru a.